Comment ça marche?

1 Les règles du jeu mathématique

On peut appréhender l'activité mathématique comme un sport. Un sport intellectuel qui se pratique depuis plus de deux mille ans, avec encore aujourd'hui des compétitions, notamment pour les jeunes (Olympiades mathématiques). Un sport où les plus talentueux réalisent des choses si belles et difficiles qu'elles enchantent les connaisseurs.

Une partie réunit deux joueurs, appelons-les E et P, comme élève et professeur. Au début de la partie, E doit choisir entre deux énoncés opposés (l'un est le contraire de l'autre) que lui propose P. Tout au long de la partie, E va essayer de montrer que l'énoncé qu'il a choisi est vrai, tandis que P va essayer de montrer qu'il est faux, ou au moins de faire apparaître une faille dans la tentative de preuve de E. Tout au long de la partie, P et E vont faire évoluer l'énoncé initial selon des règles bien précises, l'énoncé courant représentant ce qu'il reste à prouver (pour E) ou à infirmer (pour P).

1.1 La pratique

Il y a beaucoup de façons assez différentes de fixer les règles notamment selon qu'on veut ou non donner les mêmes droits à E et à P. Par exemple lors de joutes entre joueurs de niveaux comparables (deux élèves, ou deux professionnels), E et P ont les mêmes droits. Tandis que lors des compétitions officielles, P ne joue pas vraiment, il n'interagit pas avec E et n'intervient qu'après coup, sous forme d'arbitre. Les relations entre étudiants et professeurs mélangent les deux genres précédents. Au cours des séances d'exercices, l'étudiant joue en position E et le professeur en position P, et si le professeur est jeune (d'esprit) et dynamique, ils peuvent interagir. Pendant les cours, c'est le professeur qui joue en position E; il prétend se débrouiller "contre toute défense", et l'étudiant, piètre défenseur en général, démissionne presque toujours de son rôle d'arbitre.

1.2 Le mépris du réglement

Le sport mathématique évolue constamment, notamment en se dotant de règles de plus en plus précises pour faire face aux situations litigieuses que la pratique met en évidence. Plus exactement, la communauté des mathématiciens dispose en son sein d'une sorte de commission d'arbitrage, constituée par les logiciens, qui s'occupe du réglement. Mais l'idéologie dominante, mise en place notamment il y a un demi-siècle par les Eléments de Mathématiques de Nicolas Bourbaki, considère qu'il serait impraticable de respecter le réglement, et qu'il faut donc se contenter d'en respecter l'esprit. On se retrouve de ce fait en présence d'un sport où le réglement est très peu présent. Les pratiquants (et les arbitres puisque, en mathématiques comme dans le tennis amateur, l'arbitrage effectif est confié aux joueurs eux-mêmes) apprennent à jouer en regardant faire les autres. Ils n'ont pour la plupart aucune idée de la structure du réglement, qui n'est pas plus a ffiché par l'Union Mathématique Internationale que par la toute-puissante Société Mathématique Américaine.

1.3 Les pros

A dire vrai, au niveau professionnel, ça ne se passe pas trop mal. C'est comme chez les chasseurs des Inconnus. Il y a les mauvais mathématiciens: ce qu'ils disent ou écrivent n'a qu'un rapport lointain avec le réglement, et on ne voit pas du tout ce qu'ils veulent dire, mais ce n'est pas bien grave parce que de toute façon, ce n'est pas très intéressant. Et à côté de ça, il y a les bons mathématiciens: ce qu'ils disent ou écrivent n'a pas grand rapport avec le réglement mais ce qu'ils disent est intéressant, et au prix d'un effort plus ou moins important, on arrive à comprendre l'essentiel de ce qu'ils veulent dire (pour un cas un peu extrême, voir Kepler). Les litiges, s'ils ne sont pas rares, restent cantonnés au niveau individuel: un mathématicien diffuse ce qu'il prétend être la preuve d'un théorème, il se fait casser par l'arbitre et crie au scandale dans l'indifférence générale.

1.4 Les amateurs

C'est au niveau amateur, c'est-à-dire dans l'enseignement, qu'il y a du dégât. L'absence de standard, autrement dit de contrat clair, contribue inévitablement à l'incompréhension et au rejet entre les profs de maths et une fraction de leurs élèves. Elle ouvre également la voie à de déplorables déviations intégristes.

1.5 Mathématiques et bon sens

Au niveau amateur, c'est-à-dire dans l'enseignement, la situation est plus confuse. Souvent les élèves ressentent plus que leurs professeurs le besoin de règles du jeu. Ils demandent "Est-ce que j'ai le droit d'élever au carré?" ou bien "Est-ce que je peux simplifier par m?". Et trop souvent, le professeur répond que ce n'est pas une affaire de droit, mais une affaire de bon sens: selon lui, l'élève n'aurait qu'à réfléchir pour trouver la réponse à sa question. Il insinue qu'il n'y a qu'une seule façon d'être logique, rationnel et que chacun peut retrouver cette façon d'être en son for intérieur. La réalité est bien différente. Il y a une grande variété de logiques dans lesquelles on peut raisonner efficacement. Bien entendu, les différences entre ces logiques sont subtiles mais elles affectent le sens de mots aussi fondamentaux que "et", "ou", "si", "non" et bien sûr "vrai" et "faux". Dans le même ordre d'idées, les conventions jouent un rôle essentiel en mathématiques: au lieu de croire que 1/0 "n'existe pas", il vaut mieux constater qu' on n'a fait jusqu'ici aucune convention donnant un sens à 1/0. Le cas de 0^0 est peut-être plus exemplaire puisqu'on peut trouver des gens raisonnables pour préférer la convention $0^0 = 0$ et d'autres prônant $0^0 = 1$. Et la question n'est pas de savoir lesquels ont raison mais plutôt quels sont les avantages et inconvénients respectifs des deux conventions.

1.6 Mathématiques formelles et mathématiques informelles

Au siècle dernier, la découverte de paradoxes a posé aux mathématiciens la question dérangeante de la pertinence de leur activité favorite. La réponse qu'ils ont préféré considérer comme satisfaisante est la suivante. On dispose d'une notion de mathématiques formelles, avec des règles ultra-précises, sur lesquelles on compte pour exclure tout paradoxe; moyennant quoi on fait des mathématiques informelles comme avant, en acceptant comme "preuve informelle" tout texte dont la lecture donne à penser qu'il existe une preuve formelle de l'énoncé concerné.

Ce point de vue est magistralement exposé dans l'introduction du Cours d'Algèbre de Roger Godement, qui date des années soixante. On y donne délibérément une définition impraticable des mathématiques formelles en y interdisant les abréviations (autrement dit les définitions) et les trous (comme si on ne pouvait pas faire des preuves formelles incomplètes).

1.7 Mathématiques et programmation, preuves et calculs

C'est aussi au siècle dernier qu'ont été inventés les premiers langages formels de calcul, comme la machine de Turing ou le lambda-calcul de Church, qui étaient très théoriques et dramatiquement impraticables. Aucune autorité morale n'ayant décrété qu'un langage formel de calcul devait rester impraticable, ces langages initiaux ont tout naturellement ouvert la voie à des générations de langages de programmation ou de calcul formel de plus en plus intelligents et de plus en plus conviviaux.

Il faut s'attendre à observer un développement analogue des langages formels de preuve, avec l'apparition progressive de logiciels de plus en plus conviviaux et de plus en plus performants pour faire des mathématiques. D'ailleurs de tels logiciels existent déjà depuis longtemps, même s'ils ne sont pas encore assez performants pour que les mathématiciens professionnels y trouvent leur compte, ni assez conviviaux pour que les amateurs puissent s'en servir.

1.8 Le réglement? Quel réglement?

On a déjà compris qu'il n'y a pas qu'un seul réglement possible. La plupart des pros capables de citer le réglement auquel ils se réfèrent citeront le seul dont ils ont entendu parler, ZFC (le C fait référence à l'axiome dit du choix, qu'on ajoute aux règles proposées au début du siècle dernier par Zermelo et Frankel). C'est un réglement non interactif, où P se contente d'arbitrer. Comme on a dit plus haut, il est introuvable et gravement impraticable. Par ailleurs, on a déjà mentionné l'existence de plusieurs logiciels de preuve, disposant chacun d'un réglement complet et totalement praticable. On adopte ici un réglement largement inspiré dans sa forme par celui du logiciel Coq, et totalement compatible avec ZFC quant au fond.

2 Généralités sur le langage mathématiques

2.1 Formules et objets mathématiques

Quand on fait des maths, on veut manipuler des objets dits mathématiques. En réalité on manipule des formules. On dit parfois que ces formules représentent les objets en question. En fait on peut très bien se dispenser de comprendre cette phrase. Ce qui est important, c'est l'égalité entre formules, et le fait que deux formules différentes, comme $1 + 2$ et $2 + 1$, peuvent être égales. Si on veut, on peut dire que deux formules représentent le même objet précisément quand elles sont égales.

Comme exemples de formules, on a 0, $\mathbf{R}^2$, $x \mapsto 2\sin x$,$\forall x, y \in \mathbf{R}, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$. Ces formules peuvent être traduites en langue plus naturelle où elles deviennent par exemple zéro, le plan réel (standard?), le double de la fonction sinus, la fonction f est croissante (au sens large?).

2.2 Syntaxe

Il est infiniment plus facile d'expliquer les règles d'écriture pour les formule s mathématiques que leurs contreparties en langue naturelle. Et c'est pareil pour les règles concernant la manipulation de ces formules. Ces règles d'écriture sont quand même trop complexes pour qu'on puisse en dresser, là tout de suite, la liste définitive. En fait, ces règles s'apparentent aux règles de grammaire et d'orthographe de nos langues naturelles. La principale différence, c'est que les langues naturelles existent avant les règles qui sont censées les décrire, alors que les langages formels sont définis par des jeux de règles. Et bien sûr, ceux qui inventent les langages formels choisissent des jeux de règles aussi simples que possible.

2.3 Langages formels

Dans un langage formel, on distingue volontiers l'alphabet, dont les éléments sont les caractères, les mots qui sont des assemblages de caractères, et les phrases, qui sont des assemblages de mots. De ce point de vue, nos formules sont des phrases.

La syntaxe est la branche de la théorie des langages qui s'occupe de classifier les langages. La syntaxe s'occupe en particulier de proposer différentes façons de formuler ou décrire les langages. Par exemple, c'est la syntaxe qui s'intéresse, entre bien d'autres choses, aux questions de parenthésage et de priorités. Ou peut-être vaut-il mieux dire que la syntaxe s'occupe de donner leur juste place à ces questions. La syntaxe met à disposition des moyens d'expression performants pour formuler les règles de grammaire concernant le langage mathématique. Plutôt que d' exploiter cette machinerie qui nous infligerait une couche de formalisme supplémentaire, nous allons gérer les questions de syntaxe informellement, au coup par coup. Ce choix correspond au fait que les fautes de syntaxe sont bien plus faciles à éliminer que les fautes concernant le typage et le sens, au dépistage desquelles nous accorderons plus de soin.