

# Booléens et connecteurs

Dédou

Février 2011

# Les deux booléens

## Les deux booléens

L'ensemble, noté  $\mathbb{B}$  des booléens a exactement deux éléments

- Vrai, qu'on note  $V$  quand on est pressé
- Faux, qu'on note  $F$  quand on est pressé.

## Autrement dit

$$\mathbb{B} := \{V, F\}.$$

Sur ce petit ensemble ridicule, on a plein d'opérations très importantes, qu'on appelle aussi **connecteurs**.

# La négation

La négation est un connecteur “unaire” ( i.e. à un seul argument )  
dont voici la carte de visite

$$\begin{aligned} \text{neg} : \mathbb{B} &\rightarrow \mathbb{B} \\ b &\mapsto \bar{b} \\ b &\mapsto \text{if } b = V \text{ then } F \text{ else } V \end{aligned}$$

L'explicitation de la négation

$$\forall b : \mathbb{B}, \quad \bar{b} = \text{if } b = V \text{ then } F \text{ else } V.$$

Exo 1

Démontrez que  $\text{neg} \circ \text{neg}$  est l'identité de  $\mathbb{B}$ .

# Mon premier connecteur binaire

La conjonction est un connecteur “binaire” ( i.e. à deux arguments)

dont voici la carte de visite

$$\begin{aligned}\text{and} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} &\rightarrow \mathbb{B} \\ (b, b') &\mapsto b \text{ and } b' \\ (b, b') &\mapsto \text{if } b = V \text{ then } b' \text{ else } F.\end{aligned}$$

L'explicitation de la conjonction

$$\forall b, b' : \mathbb{B}, \quad b \text{ and } b' = \text{if } b = V \text{ then } b' \text{ else } F.$$

Exo 2

- Calculez  $V$  and  $F$ .
- Donnez une autre formule pour la même opération.

# Ma première table de vérité

## Plutôt que la formule pourrie

$\text{and} := (b, b') \mapsto \text{if } b = V \text{ then } b' \text{ else } F$

on préfère donner la table de vérité, qui contient la même information

A and B	V	F
V	V	F
F	F	F

# Mon deuxième connecteur binaire

La disjonction est aussi un connecteur "binaire"

dont voici la carte de visite

$$\begin{aligned} \text{or : } \mathbb{B} \times \mathbb{B} &\rightarrow \mathbb{B} \\ (b, b') &\mapsto b \text{ or } b' \\ (b, b') &\mapsto \text{if } b = V \text{ then } V \text{ else } b'. \end{aligned}$$

## Exo 3

- Calculez  $F$  or  $V$ .
- Ecrivez la règle d'explicitation de la disjonction.
- Ecrivez la table de vérité de la disjonction.

# Mon troisième connecteur binaire

L'implication est encore un connecteur "binaire"

dont voici la carte de visite

$$\begin{aligned} \text{impl} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} &\rightarrow \mathbb{B} \\ (b, b') &\mapsto b \Rightarrow b' \\ (b, b') &\mapsto \text{if } b = V \text{ then } b' \text{ else } V. \end{aligned}$$

## Exo 4

- Calculez  $F \Rightarrow V$ .
- Ecrivez la table de vérité de l'implication.
- Donnez une autre formule pour la même opération.

## Zoom sur $F \Rightarrow V$

Certains ont du mal avec

$F \Rightarrow V$  est vrai !

Pourtant

- a)  $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$  est bien vrai.
- b) C'est donc vrai en particulier pour  $x := -2$ , ce qui veut dire

$$-2 \geq 1 \Rightarrow 4 \geq 1$$

- c) Or  $-2 \geq 1$  est faux et  $4 \geq 1$  est vrai ....

Si ce tour de passe-passe ne vous a pas convaincu

- a) l'égalité  $F \Rightarrow V = V$  est imposée par la définition de  $\Rightarrow$ .
- b) Il s'agit donc d'une convention, qu'on peut aimer ou détester, mais dont il faut savoir qu'elle est universellement respectée.



# Equations algébriques

Les opérations intéressantes ont des propriétés intéressantes.

Nos connecteurs vérifient des tas de belles relations, qu'on va effleurer.

## Exo 5

- a) Rappelez une propriété de l'addition des nombres.
- b) Rappelez une relation entre l'addition et la multiplication des nombres.

# Une commutativité

## La conjonction est commutative

- version française : la conjonction ne dépend pas de l'ordre de ses deux arguments.
- version formelle :

$$\forall b, b' : \mathbb{B}, \quad b \text{ and } b' = b' \text{ and } b.$$

## Preuve ?

# Une preuve de commutativité

$$\forall b, b' : \mathbb{B}, \quad b \text{ and } b' = b' \text{ and } b.$$

## Preuve

Soient donc  $b$  et  $b'$  nos deux booléens [on **explícite**  $\forall$ ]  
et supposons d'abord  $b$  vrai. [on **distingue selon**  $b$ ]

Si  $b'$  est vrai, [maintenant on **distingue selon**  $b'$ ]  
on trouve  $b \text{ and } b' = V$  et  $b' \text{ and } b = V$  et il y a bien égalité.

[on **réécrit avec**  $\text{and}(b, b') = \text{if } b = V \text{ then } b' \text{ else } F$ ]  
Si  $b'$  est faux [deuxième cas pour  $b'$ ]

on trouve  $b \text{ and } b' = F$  et  $b' \text{ and } b = F$  et il y a encore égalité.  
[on **réécrit avec** la même formule]

Le cas où  $b$  est faux [deuxième cas pour  $b'$ ]  
se traite de la même façon.

# Une autre commutativité

## Exo 6

- a) Donnez la version formelle de la commutativité de la disjonction.
- b) Ecrivez une preuve de cette commutativité où les tactiques se voient bien.

# L'implication n'est pas commutative

Version formelle de la commutativité (fausse) de l'implication :

$$\forall b, b' : \mathbb{B}, \quad b \Rightarrow b' = b' \Rightarrow b.$$

Version formelle de la non-commutativité de l'implication :

$$\exists b, b' : \mathbb{B}, \quad b \Rightarrow b' \neq b' \Rightarrow b.$$

Preuve de la non-commutativité de l'implication :

On prend  $b := V$  et  $b' := F$ ; [on **exhibe** les témoins de l'existence] on trouve  $b \Rightarrow b' = F$  et  $b' \Rightarrow b = V$  et il n'y a pas égalité.

[on **réécrit avec**  $\text{impl}(b, b') = \text{if } b = V \text{ then } b' \text{ else } V$ ]

# Une associativité

## La conjonction est associative

- version française : on peut calculer  $a$  and  $b$  and  $c$  en commençant de n'importe quel côté.
- version formelle :

$$\forall a, b, c : \mathbb{B}, \quad (a \text{ and } b) \text{ and } c = a \text{ and } (b \text{ and } c).$$

## Preuve

On inspecte les huit cas...

## Exo 7

Traitez le cas  $(V, F, F)$ .

# Une autre associativité

## Exo 8

Donnez la version formelle de l'associativité de la disjonction.

# L'implication n'est pas associative

## Exo 9

- a) Donnez une version formelle de la non-associativité de l'implication.
- b) Donnez une preuve de cette non-associativité.



# Une équation à deux connecteurs

## La conjonction distribue la disjonction

- version française : la disjonction avec une conjonction est la conjonction des disjonctions.
- version formelle :

$$\forall a, b, c : \mathbb{B}, \quad (a \text{ and } b) \text{ or } c = (a \text{ or } c) \text{ and } (b \text{ or } c).$$

## Preuve

On inspecte les huit cas...

## Exo 10

Traitez le cas  $(V, F, F)$ .

## Qui est distributif ?

- dans  $a(b + c) = ab + ac$ , on voit que la multiplication est distribuée
- et donc, si quelqu'un distribue, c'est l'addition.
- On pourrait dire "l'addition distribue la multiplication".
- Mais on dit "la multiplication est distributive par rapport à l'addition".
- On a qu'à se dire que distributif veut dire distribuable.

# Une autre distributivité

## Exo 11

Donnez la version formelle de la distributivité de la disjonction sur la conjonction.

# Une autre relation entre deux connecteurs

## La contraposition

- version française : une implication ne change pas de valeur quand on remplace chaque argument par la négation de l'autre.
- version formelle :

$$\forall a, b : \mathbb{B}, \quad a \Rightarrow b = \bar{b} \Rightarrow \bar{a}.$$

# Une relation entre trois connecteurs

## La négation d'une conjonction

- version française : la négation d'une conjonction est la disjonction des négations.
- version formelle :

$$\forall a, b : \mathbb{B}, \quad \overline{a \text{ and } b} = \bar{a} \text{ or } \bar{b}.$$

## Preuve

On inspecte les quatre cas.

## Exo 12

Traitez le cas  $(V, F)$ .

# La négation d'une disjonction

exo 13

Ecrivez l'énoncé qui permet de réécrire la négation d'une disjonction.

## L'électronique numérique

- sait fabriquer des circuits avec deux entrées et une sortie,
- qui constituent la contre-partie électrique de nos connecteurs.
- En combinant de tels circuits de base,
- on arrive à trouver une contre-partie électrique à des fonctions plus complexes,
- comme par exemple l'addition ou la multiplication des entiers (codés en binaire).