Ensembles

Dédou

Mars 2011

Comment écrit-on les réels ?

Pour l'écriture des réels, on a donné

- des réels de base ($0, \ 1, \ e, \ \pi \ldots$)
- des constructions élémentaires pour former de nouveaux réels ($+, \ -, \ \times, \ $, exp, ln, cos)
- des constructions plus subtiles (limite, intégrale, borne supérieure).

Exo 1

Donnez votre réel favori.

Comment écrit-on les fonctions ?

On a fait pareil pour les fonctions, avec

- des fonctions de base (identité, $\cos$, $\sin$, $\exp$, $\ln\ldots$)
- des constructions élémentaires pour former de nouvelles fonctions $(+,\ -,\ \times, \circ\ldots)$
- des constructions plus subtiles (dérivée, primitives ...).

Exo 2

Donnez votre fonction favorite.

Comment écrit-on les énoncés ?

On a défini les énoncés en donnant

- des énoncés de base (V, F, $=$, $,\leq$ ...)
- des constructions élémentaires pour former de nouveaux énoncés (and , or , $\Rightarrow$)
- des constructions plus subtiles ($\forall$, $\exists$).

Exo 3

Donnez votre énoncé favori.

Comment écrit-on les ensembles ?

On va dire comment écrire des ensembles en donnant

- des ensembles de base
- des opérations élémentaires pour former de nouveaux ensembles
- des constructions plus subtiles.

Exo 3

Donnez votre ensemble favori.

Les ensembles de base

Voici nos ensembles de base

- l'ensemble vide $\emptyset$
- l'ensemble $\mathbb{B}$ des booléens
- l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels
- (ça on peut l'oublier) chaque booléen, chaque entier naturel et chaque réel est lui-même un ensemble (dont les éléments ne nous intéresseront jamais).

En vrai

les objets mathématiques sont les ensembles.

En vrai

On sait définir $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{N}$, et même on sait (plus ou moins) définir tout à partir de $\emptyset$, mais ce n'est pas notre affaire.

Opérations sur les ensembles

Voici la carte de visite de l'union

$$\begin{array}{rrcl} \cup : & Ens \times Ens & \to & Ens \\ & (A, B) & \mapsto & A \cup B \end{array}$$

Et celle de l'intersection

$$\begin{array}{rrcl} \cap : & Ens \times Ens & \to & Ens \\ & (A, B) & \mapsto & A \cap B \end{array}$$

L'union et l'intersection s'explicitent comme suit

$$\forall A, B, X : Ens, X \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; X \in A \text{ or } X \in B.$$

$$\forall A, B, X : Ens, X \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; X \in A \text{ and } X \in B.$$

Une propriété de l'union

Associativité de l'union

L'union est associative ce qui veut dire :

$$\forall A, B, C : Ens, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Et ça se prouve.

Exo 4

Pour l'associativité de l'intersection, peut-on faire la même preuve ?

Une propriété de l'union et de l'intersection

Distributivité

L'union est distributive par rapport à l'intersection ce qui veut dire :

$$\forall A, B, C : Ens, (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Et ça se prouve.

Exo 5

Faire cette preuve.

On reviendra sur union et intersection à propos des parties.

L'union disjointe d'ensembles

Voici la carte de visite de l'union disjointe

$$\begin{array}{rccl} \amalg : & Ens \times Ens & \longrightarrow & Ens \\ & (A, B) & \longmapsto & A \amalg B \\ & (A, B) & \longmapsto & \{(1, a) | a \in A\} \cup \{(2, b) | b \in B\} \end{array}$$

Intermède : le cardinal

Exemple

On pose $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \amalg \{\infty\}$.

Voici la carte de visite du cardinal

$$\begin{array}{rccl} card: & Ens & \longrightarrow & \overline{\mathbb{N}} \\ & A & \longmapsto & \#A \\ & A & \longmapsto & sup\{n : \mathbb{N} | \exists f : [1..n] \rightarrow A, f \ \ injective\} \end{array}$$

Le produit d'ensembles

Voici la carte de visite du produit

$$\begin{array}{rccl} \times : & Ens \times Ens & \longrightarrow & Ens \\ & (A, B) & \longmapsto & A \times B \\ & (A, B) & \longmapsto & \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \end{array}$$

Exo 6

a) Combien vaut $\#(\mathbb{B} \times \mathbb{B})$?
b) Combien vaut $\#(A \times B)$?

Les deux projections d'un produit

Pour chaque produit d'ensembles il y a deux projections

Voici la carte de visite de la première projection du produit de A par B

$$\begin{array}{rccl} proj_1 : & A \times B & \longrightarrow & A \\ & (a, b) & \longmapsto & proj_1(a, b) \\ & (a, b) & \longmapsto & a. \end{array}$$

Exo 7

Ecrivez la carte de visite de la seconde projection du produit de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{B}$.

Intermède : $\mapsto$ sur un produit

Pour nos fonctions linéaires de deux variables

- on écrit sans état d'âme $f := (x, y) \mapsto 2x + 3y$.
- or on a dit que, devant un mapsto, on met une variable
- et (x, y) n'est pas une variable.
- C'est qu'on fait la convention que par exemple $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ est un raccourci pour $z \mapsto 2proj_1(z) + 3proj_2(z)$.

Exo 8

Donnez la forme conventionnelle pour
$z \mapsto proj_1(z)proj_2(z) - (proj_2(z))^2$.

L'exponentiation d'ensembles

Voici la carte de visite de cette exponentiation

$$\begin{array}{rccl} Exp : & Ens \times Ens & \longrightarrow & Ens \\ & (A, B) & \longmapsto & B^A \\ & (A, B) & \longmapsto & A \longrightarrow B \end{array}$$

Cette construction est tellement importante qu'

on a deux façons de la noter (on en a profité pour ne pas donner de formule ; on reviendra sur cette définition plus loin).

Exo 9

a) Combien vaut $\#(\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B})$?
b) Combien vaut $\#B^A$?

L'appartenance

L'appartenance

c'est la relation primitive qu'il peut y avoir entre deux ensembles. Si A appartient à B , on dit aussi que A est un élément de B, et on note ça $A \in B$.

Exemple

l'intervalle $]e, \pi[$ appartient à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des parties de $\mathbb{R}$, tandis que dans l'autre sens ça ne le fait pas, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est pas un élément de $]e, \pi[$.

Exo 10

Donner un élément de $]e, \pi[$.

L'inclusion

L'inclusion, c'est la relation d'ordre intuitive qu'il peut y avoir entre deux ensembles. Elle est définie à partir de l'appartenance :

Definition

On dit que A inclut B , si tout élément de B est aussi élément de A, ce qu'on formalise de la façon suivante :

$$A \supset B \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in A.$$

On dit aussi que A contient B, ou que B est inclus (ou contenu) dans A, ou que B est une partie de A, et on note aussi ça $B \subset A$.

Exemple

l'intervalle $]e, \pi[$ est contenu dans l'intervalle $[1, 5]$ tandis que dans l'autre sens ça ne le fait pas.

Réflexivité de l'inclusion

Proposition

L'inclusion des ensembles est réflexive, ce qui veut dire qu'on a :

$$\forall A : Ens, A \subset A.$$

Et ça se démontre : ForallB, ReecB, ForallB, ImpB, Hyp.

Transitivité de l'inclusion

Proposition

L'inclusion des ensembles est transitive, ce qui veut dire qu'on a :

$$\forall A, B, C : Ens, A \subset B \text{ and } B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

Et ça se démontre : ForallB, ForallB, ForallB, ImpB, EtC, ReecB, ReecC, ReecC, ForallB, ForallC, ForallC, ImpB, ImpC, ...

Exo 11

Finir la preuve.

Antisymétrie de l'inclusion

Proposition

L'inclusion des ensembles est antisymétrique, ce qui veut dire qu'on a :

$$\forall A, B : Ens, A = B \iff A \subset B \text{ and } B \subset A.$$

Et ça ne se démontre pas, c'est un axiome, ou la définition de l'égalité des ensembles.

L'ensemble des parties

L'ensemble des parties d'un ensemble E

c'est un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les ensembles inclus dans E. On a donc

$$\forall E, X : Ens, X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E.$$

Les parties

Comme construction subtile d'ensembles

On a des constructions des parties....
Ca mérite un chapitre entier....

Exo 10

Donnez votre partie favorite de $\mathbb{R}^2$.