

Applications

Dédou

Mars 2012

Définition

Un graphe dans $E \times F$, c'est une partie G de $E \times F$ vérifiant la condition d' "existence et unicité de l'image" :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in G.$$

Exemple

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 + y = x^2\}$ est un graphe.

Graphe d'une application

Définition

Si $f : E \rightarrow F$ est une application, son graphe est l'ensemble

$$\{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

Exemple

Le graphe de $x \mapsto x^2$ est la parabole d'équation $y = x^2$.

La recette

Pour définir une application de E vers F ,
il faut donc donner une partie G de $E \times F$ et prouver que c'est un
graphe.

La ressource

Si G est un graphe dans $E \times F$, il existe une (unique) application
 $f : E \rightarrow F$ telle que, pour tout x de E , $(x, f(x))$ soit dans G .

Ensembles d'applications

Notation :

L'ensemble des applications de E vers F est noté $E \rightarrow F$.

Définition

Si g est une application de E dans F et x un élément de E , on note $g(x)$ l'unique élément de F vérifiant $(x, y) \in g$, et on dit que c'est l'image de x par g .

Composition d'applications

Définition

Soient R, S, T trois ensembles, f une application de R dans S et g une application de S dans T . On définit leur composée par la formule

$$g \circ f := \{(x, z) : R \times T \mid \exists y : S, (x, y) \in f \text{ et } (y, z) \in g\}.$$

Proposition

Dans le même contexte, $g \circ f$ est une application .

Et ça se prouve.

Proposition

La composition des applications est associative.

L'égalité des applications

Proposition

Deux applications g et h de E dans F sont égales ssi tout x de E a la même image par g et par h .

Et ça se prouve.

La construction mapsto

En pratique,

on définit une application $f : E \rightarrow F$ par une formule identifiant $f(x)$.

Pour bien gérer le statut spécial de la variable x , au lieu de noter notre application $f(x)$, ce qui serait frauduleux (pas de x dans le contexte), on la note $x \mapsto f(x)$.

Applications injectives

Définition

on dit que l'application $f : E \rightarrow F$ est injective si elle vérifie la condition d'unicité des antédédents :

$$\forall x, y : E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3$ est une application injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Proposition

- i) la composée de deux applications injectives est injective
- ii) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
- iii) si $f \circ g$ et $f \circ h$ sont égales et f est injective, alors g et h sont égales.
- iv) si $f : E \rightarrow F$ est injective avec E non vide, alors il existe $g : F \rightarrow E$ avec $g \circ f = Id_E$.

Applications surjectives

Définition

on dit que l'application $f : E \rightarrow F$ est surjective si elle vérifie la condition d'existence des antédédents :

$$\forall y : F, \exists x : E, f(x) = y.$$

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3$ est une application surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Propriétés des applications surjectives

Proposition

- i) la composée de deux applications surjectives est surjective
- ii) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
- iii) si $g \circ f$ et $h \circ f$ sont égales et f est surjective, alors g et h sont égales.

L'axiome du choix

L'énoncé suivant est plutôt vrai mais pas démontrable

iv) si $f : E \rightarrow F$ est surjective, alors il pourrait bien exister $g : F \rightarrow E$ avec $f \circ g = Id_F$.

L'hypothèse du continu

L'énoncé suivant est plutôt vrai mais pas démontrable

Soit P une partie non vide de \mathbb{R} . Alors ou bien P est l'image d'une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ou bien P est l'image d'une application injective $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Applications bijectives

Définition

on dit que l'application $f : E \rightarrow F$ est bijective si elle est injective et surjective, autrement dit si elle vérifie la condition d'existence et d'unicité des antécédents.

Proposition

Si l'application $f : E \rightarrow F$ est bijective alors $recf := \{(y, x) \in F \times E \mid y = f(x)\}$ est une application qui vérifie $f \circ recf = Id_F$ et $recf \circ f = Id_E$.

Ici, on a noté Id_X , l'identité de X , définie par $Id_X : X \rightarrow X := x \mapsto x$.