Enoncés

Dédou

Février 2012

Formules et nombres

Mon premier énoncé mathématique, c'est

$$2 + 2 = 4.$$

On y voit deux formules différentes pour le même nombre.

L'ensemble des formules pour les entiers

Il y a donc un ensemble des formules de type entier

mais on ne s'y est jamais trop intéressé.

Enoncés et booléens

Les énoncés sont

les formules pour les booléens.

L'ensemble de tous les énoncés

est noté *Prop* (au lieu d' "énoncé", on dit parfois "proposition").

Exemples

V and F et $V \Rightarrow F$

sont deux énoncés différents, qui sont vrais tous les deux.

Une différence :

$V \Rightarrow F$ a une réciproque, qui est $F \Rightarrow V$, tandis que V and F n'a pas de réciproque.

Comment définir les énoncés ?

On va définir les énoncés en donnant

- une liste d'énoncés de base
- une liste de constructions pour formuler de nouveaux énoncés à partir d'anciens.

Ca nous rappelle les fonctions qu'on rencontre :

- y'a les fonctions de base, sinus, cosinus, logarithme, exponentielle, et les puissances ;
- y'a les sommes, produits, quotients ;
- y'a les composées.

Les énoncés de base

Voici nos énoncés de base

- V et F sont des énoncés
- si x et y sont deux éléments d'un même ensemble (par exemple $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), $x = y$ et $x \neq y$ sont des énoncés
- (pour être à l'aise) si x et y sont deux réels, $x \leq y$ et $x < y$ sont des énoncés.

Les connecteurs

Si A et B sont deux énoncés, il en est de même pour :

- A and B
- A or B.

Exemple

$1 = 3$ or $V = F$ est un énoncé.

L'implication

sera **définie** plus loin (après la négation) par

$$\Rightarrow := (A, B) \mapsto \overline{A} \text{ or } B.$$

Le type des connecteurs

Nos connecteurs ont donc les types suivants :

- and : $Prop \times Prop \rightarrow Prop$
- or : $Prop \times Prop \rightarrow Prop$
- $\Rightarrow$: $Prop \times Prop \rightarrow Prop$.

Intermède : Enoncés et variables

Pour les énoncés comme pour le reste

il y a un contexte, et dans les énoncés, il peut y avoir des variables.

Exemple

Si x est une variable réelle et b une variable booléenne du contexte,

$$x \leq \pi \text{ and } (b = F)$$

est un énoncé.

Les quantificateurs

Le truc sérieux pour faire des énoncés, c'est

les quantificateurs.

En première approximation

il y a deux quantificateurs ; $\forall$ ("pour tout") et $\exists$ ("il existe").

Les quantificateurs universels

Le quantificateur universel, c'est

quelque soit, alias pour tout, alias $\forall$. On dit qu'un énoncé qui commence par un quantificateur universel est un énoncé universel.

En seconde approximation

il y a un quantificateur universel par ensemble.
On note très provisoirement $\forall_E$ le quantificateur universel pour l'ensemble E.
On a donc par exemple un quantificateur $\forall_{\mathbb{R}}$ et un autre $\forall_{\mathbb{B}}$.

Le quantificateur universel réel

Le quantificateur universel réel

a pour carte de visite :

$$\begin{array}{llll} \forall_{\mathbb{R}} : & (\mathbb{R} \to \mathit{Prop}) & \to & \mathit{Prop} \\ & P & \mapsto & \forall_{\mathbb{R}} P \\ & P & \mapsto & \forall x : \mathbb{R}, P(x). \end{array}$$

Exemple d'énoncé "universel"

$$\forall x : \mathbb{R}, x \leq 0 \text{ or } 0 \leq x.$$

Quantification et liaison

Dans $\forall x : \mathbb{R}, P(x)$

la variable x est liée.

Exemple

$$\forall x : \mathbb{R}, x \leq 0 \text{ or } 0 \leq x$$

et

$$\forall y : \mathbb{R}, y \leq 0 \text{ or } 0 \leq y$$

sont deux énoncés égaux.

Intermède : Egalité d'énoncés

Il est important de distinguer les variables liées des variables libres

mais il n'est jamais important de savoir si deux énoncés sont égaux.
Ce qui peut être important,
c'est de savoir si deux énoncés sont **équivalents**.

Le quantificateur universel booléen

Exemple d'énoncé “universel booléen” vrai

$$\forall b : \mathbb{B}, V \text{ and } b.$$

Le sens de la quantification universelle

Exemple

Quand on dit "pour tout entier n, $n^3 + 3n^2 + 2n$ est divisible par 6", on veut dire que tous les énoncés suivants sont vrais :

- (pour $n = 0$:) 0 est divisible par 6
- (pour $n = 1$:) 6 est divisible par 6
- (pour $n = 2$:) 18 est divisible par 6
- etc

Un énoncé universel

peut donc condenser une infinité d'énoncés plus simples.

Les quantificateurs existenciels

Le quantificateur existenciel, c'est il existe, alias $\exists$.

On dit qu'un énoncé qui commence par un quantificateur existenciel est un énoncé existenciel. Comme pour les universels, il y a un quantificateur existenciel par ensemble.
On note très provisoirement $\exists_E$ le quantificateur existenciel pour l'ensemble E.

Le quantificateur existenciel réel

Le quantificateur existenciel réel

a pour carte de visite :

$$\begin{array}{rcll} \forall_{\mathbb{R}} : & (\mathbb{R} \to Prop) & \to & Prop \\ & P & \mapsto & \exists_{\mathbb{R}} P \\ & P & \mapsto & \exists x : \mathbb{R}, P(x). \end{array}$$

Exemple d'énoncé "existenciel"

$$\exists x : \mathbb{R}, x^4 - 1000x^3 + \pi x^2 - x = 3.$$

Quantification existencielle et liaison

Dans $\exists x : E, P(x)$

la variable x est liée.
Les énoncés

$$\exists x : E, P(x)$$

et

$$\exists y : E, P(y)$$

sont égaux
(mais on s'en fout).

Le sens de la quantification existencielle

Exemple

Quand on dit

$$\text{“il existe un entier } n \text{ vérifiant } (n+2)^{1000} \leq 2^n\text{”},$$

on veut dire qu'au moins un des énoncés suivants est vrai :

- (pour $n = 0$:) $2^{1000} \leq 1$
- (pour $n = 1$:) $3^{1000} \leq 2$
- (pour $n = 2$:) $4^{1000} \leq 4$
- (pour $n = 3$:) $5^{1000} \leq 8$
- etc

Dans un tel exemple, on saurait trouver un entier n explicite ayant cette propriété, par exemple $n := 10^6$, mais on se fiche de la valeur exacte, et on préfère la désigner par un nom court.

Bilan

Tous les énoncés s'obtiennent

- à partir des énoncés de base (V, F, égalités, inégalités)
- avec des connecteurs binaires
- et/ou des quantificateurs.

Ce n'est pas tout-à-fait vrai

à cause des définitions, dont on va parler bientôt.
Ce qui est vrai, c'est qu'un énoncé **explicite** est de l'une des formes indiquées plus haut.
Un énoncé explicite est un énoncé qui ne sollicite aucune définition.
Tout énoncé est équivalent (égal ?) à un énoncé explicite, qui s'obtient en remplaçant tous les noms par leur valeur.

Empilement de quantificateurs

On peut enchainer les quantificateurs, exemples :

- $\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, x > y \text{ or } x^3 \leq y^3$
- (qu'on peut raccourcir en $\forall x, y : \mathbb{R}, x > y \text{ or } x^3 \leq y^3$)
- $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, e^x \leq M$.

Quand on enchaine plusieurs quantificateurs

si on permute un $\forall$ et un $\exists$, ça risque de changer le sens.

Exemple

- $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, e^x \leq M$ est faux tandis que
- $\forall x : \mathbb{R}, \exists M : \mathbb{R}, e^x \leq M$ est vrai (prendre $M := e^x$).

En revanche on peut permuter deux $\forall$ ou deux $\exists$

$\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, x > y \text{ or } x^3 \leq y^3$ et
$\forall y : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, x > y \text{ or } x^3 \leq y^3$ sont équivalents.

Langage naturel et langage formel

On est habitués aux énoncés en langage naturel

Il faut savoir les traduire en langage formel.

La seule façon sûre de comprendre un énoncé en langage naturel, c'est de lui associer un énoncé formel.

Exemple

dans $\mathbb{N}$, entre deux cubes consécutifs, il y a toujours un carrés se traduit en

$$\forall n : \mathbb{N}, \exists p : \mathbb{N}, n^3 \leq p^2 \leq (n+1)^3.$$

Autres exemples

- pour n suffisamment grand, u_n est positif
- f garde un signe fixe sur I
- u_n tend vers 297 quand n tend vers l'infini
- f respecte les combinaisons linéaires

Exercice

Exo 1

Formaliser l'énoncé : tout entier naturel est somme de quatre carrés.

Inversement

Etant donné un énoncé formel

il peut être utile d'en connaître une traduction en langage naturel, plus proche de notreintuition.

Exo 2

Traduire en langue naturelle l'énoncé suivant :

$$\exists n : \mathbb{N}, \forall x, y : \mathbb{N}, n \neq x^2 + y^2.$$

La négation

On a une négation pour les énoncés

dont voici la carte de visite

$$\begin{array}{rccc} non: & Prop & \to & Prop \\ & P & \mapsto & \overline{P} \end{array}$$

Le calcul de la négation

la négation d'un énoncé s'obtient en appliquant les règles suivantes

- $\overline{V} = F, \quad \overline{F} = V, \quad \overline{x \leq y} = y < x, \quad \overline{x < y} = y \leq x.$
- $\overline{A \text{ and } B} = \overline{A} \text{ or } \overline{B} \quad \overline{A \text{ or } B} = \overline{A} \text{ and } \overline{B}$
- $\overline{\forall x : E, P(x)} = \exists x : E, \overline{P(x)}, \quad \overline{\exists x : E, P(x)} = \forall x : E, \overline{P(x)}.$

Exemple

La négation de
$$\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M$$
est
$$\forall M : \mathbb{R}, \exists x : \mathbb{R}, M < f(x).$$

Exo 3

Calculer la négation de $\forall x, y : \mathbb{R}, y < x \text{ or } f(x) \leq f(y)$.

L'implication et sa négation

Définition

Voici la carte de visite de l'implication

$$\begin{array}{rccc} \Rightarrow: & Prop \times Prop & \to & Prop \\ & (P, Q) & \mapsto & \overline{P} \text{ or } Q \end{array}$$

Attention

La négation de l'implication est un peu bizarre :

$$\overline{P \Rightarrow Q} = P \text{ and } \overline{Q}.$$

Exo 4

Calculer la négation de $\forall x, y : \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

L'équivalence et sa négation

Définition

Voici la carte de visite de l'équivalence

$$\begin{array}{rccc} \Leftrightarrow: & Prop \times Prop & \to & Prop \\ & (P, Q) & \mapsto & (P \Rightarrow Q) \text{ and } (Q \Rightarrow P) \end{array}$$

Attention

La négation de l'équivalence est très bizarre :

$$\overline{P \Leftrightarrow Q} = (P \text{ and } \overline{Q}) \text{ or } (Q \text{ and } \overline{P}).$$