Parties

Dédou

Février 2012

Dans ce chapitre

On fixe un ensemble $\mathbb{R}$ et

on étudie ses parties.

L'inclusion des parties

L'inclusion des parties est une relation dont voici la carte de visite :

$$\begin{array}{rccl} \subset : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & Prop \\ & (X, Y) & \mapsto & X \subset Y \end{array}$$

Cette inclusion s'explicite comme suit :

$$\forall\ X\ \ Y : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset Y \Leftrightarrow \forall a : \mathbb{R}, a \in X \Rightarrow a \in Y.$$

L'inclusion ordonne les parties

L'inclusion des parties est un ordre au sens suivant :

- elle est "réflexive" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset X$.
- elle est "transitive" :
  $\forall X \ \ Y \ \ Z : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset Y$ et $Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$.
- elle est "antisymétrique" :
  $\forall X \ \ Y : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset Y$ et $Y \subset X \Rightarrow X = Y$.

Exo corrigé

Prouver la première propriété.

L'inclusion ordonne les parties II

L'inclusion des parties est un ordre au sens suivant :

- elle est "réflexive" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset X$.
- elle est "transitive" :
  $\forall X \ Y \ Z : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset Y$ et $Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$.
- elle est "antisymétrique" :
  $\forall X \ Y : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset Y$ et $Y \subset X \Rightarrow X = Y$.

Exo 1

Prouver la deuxième propriété.

Partie maximum et partie minimum

Dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y'a une partie minimum

c'est la partie vide $\emptyset$

Elle est caractérisée par la règle de réécriture

$$\forall x : \mathbb{R}, x \in \emptyset = \mathit{Faux}.$$

Exo 2

Démontrer que la partie vide est minimum, c'est-à-dire incluse dans toutes les autres.

L'appartenance

L'appartenance relie un réel à une partie de $\mathbb{R}$,

c'est une relation dont la carte de visite est comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \in_{\mathbb{R}} : \quad \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathit{Prop} \\ (X, P) & \mapsto & X \in P \end{array}$$

La réunion opère sur les parties

La réunion des parties de $\mathbb{R}$ est une opération

dont la carte de visite est :

$$\begin{array}{rccl} \cup_{\mathbb{R}} : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & (X, Y) & \mapsto & X \cup Y \end{array}$$

L'explicitation de la réunion des parties

La réunion des parties est caractérisée par la règle de réécriture suivante

$$\forall P\ \ Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, x \in P \cup Q \Leftrightarrow x \in P \text{ ou } x \in Q.$$

Propriétés de l'opération de réunion

La réunion des parties est une brave opération

- elle est "commutative" : $\forall X\ Y : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cup Y = Y \cup X$.
- elle est "associative" : $\forall X\ Y\ Z : \mathcal{P}(\mathbb{R}), (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.
- elle a un "neutre" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$.
- elle a un "absorbant" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup X = \mathbb{R}$.

Et ça se démontre.