

Séquents

Dédou

Janvier 2012

On passe aux preuves

On a vu

les définitions et les énoncés.

Il nous reste à voir

les preuves.

Preuve et démonstration

c'est la même chose.

Que prouve-t-on ?

A la base

on veut prouver un énoncé.

Au final

on doit prouver un énoncé E dans un contexte C .

C'est ça qu'on appelle un séquent.

Définition

Un séquent, c'est un contexte muni d'un énoncé (bien défini dans ce contexte) qu'on appelle le but.

Et même

on doit prouver une pile d'énoncés chacun dans son contexte.

Autrement dit

on doit prouver une pile de séquents.

Exemple de séquent

Exemple

$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x < y \vdash x^3 < y^3.$

Le symbole \vdash sépare le contexte du but ; il se lit “thèse”.

Questions de validité I

Une condition nécessaire de validité :

pour que l'énoncé E soit bien défini (on dit aussi “valide”) dans le contexte C , il faut au moins que toutes les variables libres dans E figurent dans l'environnement courant.

Exemple

L'énoncé $x = y + 2k\pi$ n'est pas valide dans le contexte $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \cos x = \cos y, \sin x = \sin y$.

Exo 1

Corrigez l'énoncé ci-dessus pour qu'il devienne bien défini et même vrai dans le contexte donné.

Questions de validité II

La condition nécessaire de validité qu'on vient de voir n'est pas suffisante.

C'est à cause des fonctions partielles.

Exemple

Dans le contexte $x \in \mathbb{R}, x < 0$, on n'a pas trop envie de dire que l'énoncé $\ln x = \sqrt{x}$ est valide.

Contentons-nous de dire qu'il faut que le but qu'on écrit soit bien défini sous les hypothèses garanties par le contexte.

Prouver, c'est quoi ?

Prouver une pile de séquents, c'est

- gérer cette pile
- en respectant les règles de gestion (dites **règles d'inférence**)
- jusqu'à ce que la pile soit vide.

Les opérations autorisées par les règles d'inférence s'appellent les tactiques.

Une preuve d'un énoncé, d'un séquent, ou d'une pile de séquents, c'est donc une liste de tactiques.

Quand on fait une preuve, on gère une pile de séquents.

- Au départ de la preuve d'un énoncé E , la pile contient un seul séquent, dont le contexte est vide, et le but est E .
- La preuve consiste en une liste de tactiques qu'on applique successivement au séquent courant (le premier de la pile)
- Chaque tactique modifie le séquent courant, et éventuellement la pile.
- La preuve est complète si, après que la liste de tactiques est exécutée, la pile résultante est vide.

Y'a plus qu'à..

Y'a plus qu'à

découvrir les **règles d'inférence**, qu'on appelle aussi tactiques, autrement dit comprendre ce qu'on a le droit de faire pour bonifier la pile.

C'est ce qu'on va faire

maintenant.