Sous-espaces vectoriels

1. **Interro**

   (a) Est-ce que le système $((5,6,7,1),(3,4,5,1),(-1,0,1,1))$ est libre ?

   (b) Trouver un système de générateurs du sous-espace des solutions du système de deux équations à quatre inconnues : $\begin{cases} y = 2x + 3t \\ z = 4x + 5t. \end{cases}$

   (c) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel des solutions du système de deux équations à cinq inconnues : $\begin{cases} x = y + t + u \\ z = 2y + 4u. \end{cases}$

   (d) Donner une base du sous-espace vectoriel des solutions du système de trois équations à quatre inconnues : $\begin{cases} 5x + 6y + 7z + t = 0 \\ 3x + 4y + 5z + t = 0 \\ x - z - t = 0. \end{cases}$

2. ## Reconnaître une base ou un système d'équations minimal

   a) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par les deux équations $7x+8y+3z = 6x+9y+3t = 0$. Extraire une base de E du système de vecteurs suivant :
   $(-6,3,6,3),(0,0,0,0),(9,9,-8,12),(11,-10,1,8),(2,-5,16,-13)$.
   b) Soit D la droite de $\mathbf{R}^3$ engendrée par $(4,3,2)$. Extraire du système d'équations suivant un système minimal d'équations pour D :
   $-7x + 4y + 8z = 0,\ -2x + 2y + z = 0,\ 9x + 10y + 8z = 0,\ 12x - 4y - 3z = 0,\ -9x + 6y + 9z = 0.$

3. ## Calculer la dimension

   a) Calculer la dimension de $I_1 := Vect((1,2,3,4),(4,3,2,1),(0,1,1,0))$,
   $I_2 := Vect((1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1),(0,1,0,1,0),(1,0,1,0,1))$.
   b) Calculer la dimension de
   $K_1 := \{(x,y,z,t,u) \in \mathbf{R}^5 | x + 2y + 3z + 4t + 5u = 4x + 3y + 2z + t + u = 0\}$,
   $K_2 := \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 | x + 3y + 2z + 4t = 4x + 2y + 3z + t = x + y + z + t = 0\}$.

4. ## Estimer la dimension

   a) On donne sept vecteurs $a_1, ..., a_7$ de $\mathbf{R}^9$. Que peut-on dire de la dimension de $Vect(a_1, ..., a_7)$ sachant que les a_i sont indépendants ? non-nuls ? liés ? distincts ? deux-à-deux non-proportionnels ?
   b) On donne six équations linéaires homogènes $e_1, ..., e_6$ de $\mathbf{R}^9$. Que peut-on dire de la dimension de $Ker(e_1, ..., e_6)$ sachant que les e_i sont indépendantes ? non-nulles ? liées ? distinctes ? que le rang du système (e_2, e_4, e_6) est 2 ?

5. ## Estimer le rang

   Que peut-on dire du rang d'un système de sept vecteurs de $\mathbf{R}^6$ sachant que :
   a) chacun des quatre premiers est combinaison linéaire des trois derniers.
   b) chacun des quatre premiers est combinaison linéaire des trois qui le suivent.
   c) le premier est combinaison linéaire des six derniers et le dernier est combinaison linéaire des six premiers.