

Gauss et le rang

1. Interro

(a) Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x + 2y + 2z + 3t = 3 \\ x + 2y + 3z - t = 4, \end{cases}$$

- (b) Pour résoudre le système suivant, quelles sont les diverses façons possibles de choisir les inconnues principales ?

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ x - y + z - t = -2. \end{cases}$$

(c) Quel est le rang des systèmes suivants ?
$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = 0 \\ 3x + 4y + 3t = 1 \\ x + 6y - 2t = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = 0 \\ 3x + 4y + 3z = 1 \\ x + 6y + 5z - 2t = 4 \end{cases}$$

(d) Ecrivez le système linéaire homogène dont la matrice est :
$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Calculer le rang de la matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Reconnaître un système incompatible

Expliquer pourquoi le système suivant est incompatible :

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2t = 1 \\ 6x + 3y - 3z - 6t = 4 \\ x + y + 2z + 5t = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + 4y + z + t = 0 \\ 5z + 7t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 2z + 4t = 1 \\ 2x - y - z + t = 0 \\ 5x + 6t = 0 \end{cases}$$

3. Permuter les instructions élémentaires

Trouver une matrice à trois lignes sur laquelle les deux instructions $E_2 := E_2 - 3E_1$; $E_3 := E_3 + 4E_2$ et $E_3 := E_3 + 4E_2$; $E_2 := E_2 - 3E_1$ ne produisent pas le même résultat.

4. Côtoyer π Le système suivant a-t-il une solution ?

$$\begin{cases} \pi x - y = 1 \\ 3123x + 2654y + 1234z = 2222 \\ 8765x + 2011y + 4321z = 3333. \end{cases}$$

5. Abuser des transformations élémentaires

- a) Montrer qu'en ajoutant simultanément à chaque équation d'un système un multiple d'une équation précédente, on obtient un système équivalent.
- b) Montrer qu'en ajoutant simultanément à chaque équation d'un système un multiple d'une autre, on peut changer le rang.