L1 Algèbre Exos8 : 22/11/12

Sous-espaces vectoriels

1. **Interro**

   (a) Est-ce que les systèmes suivants sont libres ? Générateurs ?
   $((5,6,7,1),(3,0,5,1),(-1,0,1,1))$ $((5,7,1),(3,5,1),(-1,1,1))$ $((1,2,3),(5,7,1),(3,5,1),(-1,1,1))$

   (b) Trouver un système de générateurs du sous-espace des solutions du système de deux ou trois équations à quatre ou cinq inconnues :

   $$\left\{\begin{array}{l} y = 2x + 3t \\ z = 4x + 5t \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x + y - z - t + u = 0 \\ x + y + z + t - u = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} x + y - z - t = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0. \end{array}\right.$$

2. **Contrôler le rang**

   Compléter la matrice suivante de façon que son rang soit au plus deux : $\begin{pmatrix} 6 & -8 & -6 & ? & 14 \\ -13 & -24 & 5 & -8 & -25 \\ 2 & 18 & 2 & -8 & ? \end{pmatrix}$.

3. **Discuter le rang**

   Discuter en fonction des paramètres le rang de la matrice suivante : $\begin{pmatrix} -10 & -20 & 25 & 7 & u+2 \\ -6 & 4 & 2 & -14 & 4 \\ -25 & -10 & v-1 & -28 & 6 \end{pmatrix}$.

4. **Calculer le rang**

   Calculer, en fonction du paramètre m, le rang de la matrice suivante : $\begin{pmatrix} -15 & 6 & m+2 & 3 & 12 \\ 25 & -10 & 20 & -5 & -20 \\ 5 & -2 & 4 & -1 & -4 \\ 20 & -8 & 16 & -4 & -16 \end{pmatrix}$.

5. **Estimer le rang**

   Que peut-on dire du rang d'un système de sept vecteurs de $\mathbf{R}^6$ sachant que :

   a) chacun des quatre premiers est combinaison linéaire des trois derniers.

   b) chacun des quatre premiers est combinaison linéaire des trois qui le suivent.

   c) le premier est combinaison linéaire des six derniers et le dernier est combinaison linéaire des six premiers.

   d) au moins six d'entre eux sont combinaisons linéaires des six autres.