

# Applications linéaires

## 1. Voir l'ensemble des solutions d'un système comme un noyau

Donner une application linéaire dont le noyau est l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y - z - 5t = 0 \\ 3x - 2y + z - et = 0 \end{cases} .$$

## 2. Interpréter un système comme équation aux antécédents

Interpréter le système linéaire suivant comme "équation aux antécédents de  $a$  par  $f$ " en précisant bien qui sont  $a$  et  $f$ .

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases} .$$

## 3. Transformer une équation aux antécédents en système et vice-versa

a) Exprimez sous forme de système linéaire l'équation aux antécédents de  $(1, 3, 2)$  par l'application linéaire  $(x, y) \mapsto (x - z, y - z, x - y)$ .

b) Exprimez les systèmes suivants comme équation aux antécédents

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 5y - z - t = 0 \\ 3x - 2y + z - t = 0 \end{cases} .$$

## 4. Donner des générateurs d'une image

Donner un système générateur de l'image de l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (2x + 5y, 3x + 7y, -y), & (x, y, z) &\mapsto (2x + 5y, 3x + 7y, -y - z, x + y + z), \\ (x, y) &\mapsto (2x + y, x + 7y, 0, -y), & (x, y, z) &\mapsto (x, 0, y, 0, z). \end{aligned}$$

## 5. Interpréter un sous-espace comme image

Indiquer une application linéaire dont le sous-espace suivant est l'image :

$$\begin{aligned} &\langle (1, 2, 3), (2, 3, 4) \rangle, & &\langle (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 5, 7) \rangle, & &\langle (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 0) \rangle, \\ &\langle (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle, & &\langle (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4) \rangle. \end{aligned}$$

## 6. Voir l'ensemble des solutions d'un système comme une image

Donner une application linéaire dont l'image est l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z - t = 0 \\ 2y + z + t = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - z + 2t = 0 \\ 3x + y = 0 \\ 3y + t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y - z + 2t = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 4x + y - z + 4t = 0 \end{cases} .$$

## 7. Calculer une composée ou une réciproque

a) Calculer la composée  $f \circ g$  de l'application linéaire  $f := (x, y) \mapsto (2x + 3y, 5x + 7y)$  avec l'application linéaire  $g := (x, y, z) \mapsto (-x + 3z, y + 2z)$ .

b) Calculer la réciproque de l'application linéaire  $f := (x, y) \mapsto (2x + 5y, 3x + 7y)$ .