L1 Algèbre Exos11 : 8/12/10

Calcul matriciel

1. **Calculer l'image d'un vecteur comme produit de matrices**

   En faisant le produit de matrices adéquat, calculez l'image du vecteur $(1,0,0,3)$ par l'application linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Décider d'une commutativité**

   a) Calculer la matrice de la rotation $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   b) Calculer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des x.
   c) En calculant les deux produits, décidez si ces deux transformations commutent ou non.
   d) Que peut-on dire de deux matrices $(2,2)$, A et B vérifiant $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

3. **Comprendre la bilinéarité de la multiplication et la réciprocité**

   a) Expliquer en quel sens la multiplication des matrices est linéaire en chacun de ses deux arguments.
   b) De quelle application la fonction racine carrée est-elle la réciproque ?

4. **Calculer un inverse**

   a) Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) Calculez l'inverse de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ sachant qu'elle vérifie

$$A^2 - 6A + 2I = 0.$$

5. **Décider si une matrice est inversible**

   Décidez si la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible.

   Interpoler

   a) Montrer qu'il existe un unique trinôme du second degré P vérifiant :

$$P(-1) = -4,\ P(2) = 1,\ P(3) = 8.$$

   b) Calculer ce trinôme.

6. **Raisonner**

   a) Montrer que si une matrice $(2,2)$ triangulaire est inversible, son inverse est aussi triangulaire.
   b) Montrer que le produit de deux matrices $(2,2)$ diagonales est une matrice diagonale.
   c) Est-ce que le produit de deux matrices $(2,2)$ triangulaires est triangulaires ?