L1 Algèbre Exos2: 13/09/10

Calcul vectoriel

1. **Calculer une combinaison linéaire**

   Calculer $3(-7,-10) - 10(-7,-9) - 9(4,-2)$.

2. **Résoudre une relation linéaire**

   a) Soient u, v, w trois vecteurs d'un espace vectoriel E vérifiant $28u - 11v - 19w = 0$. Exprimer v comme combinaison linéaire de u et w.

   b) Ici u, v, w sont trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $4u-14v-3w = 0$, $u = (6, \frac{1}{3}, -\frac{11}{2})$ et $v = (\frac{2}{3}, \frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$. Calculer w.

3. **Former les équations aux coordonnées**

   Ecrire les équations vérifiées par les coordonnées $(x,\ y,\ z)$ de $(2, 5, -1)$ dans le repre: $((2, 1, 3); (3, 2, 1), (4, 5, 6), (1, 1, 4))$.

4. **Exprimer un vecteur comme combinaison linéaire**

   a) Calculer la ligne des coordonnées de $(-37, 152)$ dans la base $((-5, 3), (4, -3))$.

   b) Exprimer $(-48, 75)$ comme combinaison linéaire de $(5, 6)$ et $(3, 4)$.

   c) Soient u et v deux vecteurs dans un espace vectoriel E. Exprimer $-8u+5v$ comme combinaison linéaire de $u - 2v$ et $3v$. Y a-t-il unicité?

   d) Exprimer $(12, 24, 36)$ comme combinaison linéaire des trois vecteurs: $e_1 := (2, 1, 0)$, $e_2 := (-2, 0, 0)$ et $e_3 := (3, 2, 1)$.

   e) Soit H le plan de $\mathbf{R}^3$ d'équation $4x + 5y - 2z = 0$. On pose $u := (0, 2, 5)$, $v := (2, -2, -1)$, $w := (1, 0, 2)$, $t := (-5, 4, 1)$. Vérifier que trois de ces quatre vecteurs sont dans H et exprimer le premier de ces trois vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

   f) Exprimer l'équation $2x + y = 1$ comme combinaison linéaire de $4x + y = -1$ et de $x + y = 2$.

   g) Exprimer la fonction $x \mapsto \cos(x - \frac{\pi}{6})$ comme combinaison linéaire des fonctions sinus et cosinus.

5. **Changer de base**

   Soient (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace vectoriel E et (v_1, v_2, v_3) la nouvelle base de E définie par: $v_1 := 2e_1 + 2e_2 + e_3$, $v_2 := e_1 + 5e_2 + 2e_3$, $v_3 := -3e_1 - 2e_2 - e_3$.

   a) Donnez, au choix, la ligne des coordonnées du vecteur $-v_1 + v_2 - v_3$ dans la base (e_1, e_2, e_3), ou celle des coordonnées du vecteur $-e_1 + e_2 - e_3$ dans la base (v_1, v_2, v_3).

   b) Ecrire le système d'équations vérifié par les coordonnées x, y, z du vecteur $4e_1 + \pi e_2 - e_3$ dans la base (v_1, v_2, v_3).

6. **Prouver**

   Rappeler la définition de l'addition et de la multiplication externe dans $\mathbf{R}^2$. Formuler et démontrer l'associativité et la distributivité pour ces opérations.