Matrices

1. **Aller et venir d'une application linéaire à sa matrice canonique**

   a) Calculer la matrice de l'application linéaire $(x, y) \mapsto (x + 2y, y + 2x, 0, x - y)$.

   b) Calculer l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \pi \\ 0 & 1 & e \end{pmatrix}$.

   c) La multiplication par $5X + 2$ définit une application linéaire de l'espace des binômes du premier degré dans celui des trinômes du deuxième degré. Quelle est la matrice de cette application linéaire dans les bases canoniques ?

2. **Calculer la matrice d'une transformation géométrique**

   a) Calculer la matrice de la rotation $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   b) Calculer la matrice de la projection orthogonale sur l'axe des x.
   c) Calculer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la diagonale (d'équation $x = y$).

3. **Lire sur la matrice l'image de la base canonique**

   Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 & 3 \\ e & 1 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 6 & \pi \end{pmatrix}$. Quelle est l'image par f du deuxième vecteur de la base canonique ?

4. **Choisir une base qui triangule l'évaluation**
   On considère l'espace E des trinômes du second degré et l'application

   $$ev : E \to \mathbb{R}^3 := P \mapsto (P(6), P(9), P(7)).$$

   Sans changer de base pour $\mathbb{R}^3$, choisissez une base de E dans laquelle la matrice de ev est triangulaire, et écrivez cette matrice.

5. **Décomposer linéairement une matrice**
   Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On note I_2 l'identité de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la matrice, notée A^2 de $f \circ f$ est combinaison linéaire de A et I_2.

   Calculer une somme de matrices

   a) Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & \pi \\ 1 & 1 & e \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que la transposée d'une somme est la somme des transposées.

6. **Calculer la matrice d'un endomorphisme dans une base exotique**

   Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f((-1, -1)) = (1, 2)$ et $f((0, -1)) = (0, 1)$. Calculer la matrice de f dans la base $((-1, -1), (0, -1))$.

7. **Faire du calcul vectoriel dans l'espace des matrices**

   Trouver deux matrices X et Y vérifiant $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X + 2Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.