Sous-espaces vectoriels

1. Estimer le rang

Que peut-on dire du rang d'un système de sept vecteurs de $\mathbf{R}^6$ sachant que :

a) chacun des quatre premiers est combinaison linéaire des trois derniers.

b) chacun des quatre premiers est combinaison linéaire des trois qui le suivent.

c) le premier est combinaison linéaire des six derniers et le dernier est combinaison linéaire des six premiers.

2. Estimer la dimension

a) On donne sept vecteurs $a_1, ..., a_7$ de $\mathbf{R}^9$. Que peut-on dire de la dimension de $Vect(a_1, ..., a_7)$ sachant que les a_i sont indépendants ? non-nuls ? liés ? distincts ? deux-à-deux non-proportionnels ?

b) On donne six équations linéaires homogènes $e_1, ..., e_6$ de $\mathbf{R}^9$. Que peut-on dire de la dimension de $Ker(e_1, ..., e_6)$ sachant que les e_i sont indépendants ? non-nuls ? liés ? distincts ? que le rang du système (e_2, e_4, e_6) est 2 ?

c) On donne deux sous-espaces vectoriels F et F' de $\mathbf{R}^9$. Que peut-on dire de la dimension de $F \cap F'$ sachant que les dimensions de F et F' sont 7 et 6 ?

3. Reconnaître une base ou un système d'équations minimal

a) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par les deux équations $7x+8y+3z = 6x+9y+3t = 0$. Extraire une base de E du système de vecteurs suivant :
$(-6, 3, 6, 3), (0, 0, 0, 0), (9, 9, -8, 12), (11, -10, 1, 8), (2, -5, 16, -13)$.

b) Soit D la droite de $\mathbf{R}^3$ engendrée par $(4, 3, 2)$. Extraire du système d'équations suivant un système minimal d'équations pour D :
$-7x + 4y + 8z = 0$, $-2x + 2y + z = 0$, $9x + 10y + 8z = 0$, $12x - 4y - 3z = 0$, $-9x + 6y + 9z = 0$.

4. Calculer la dimension

a) Calculer la dimension de $I_1 := Vect((1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (0, 1, 1, 0))$,
$I_2 := Vect((1, 2, 3, 4, 5), (5, 4, 3, 2, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1))$.

b) Calculer la dimension de
$K_1 := \{(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 | x + 2y + 3z + 4t + 5u = 4x + 3y + 2z + t + u = 0\}$,
$K_2 := \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 | x + 3y + 2z + 4t = 4x + 2y + 3z + t = x + y + z + t = 0\}$.

5. Aller et venir d'un système de générateurs à un système d'équations

a) Calculer une base puis un système d'équations minimal pour les sous-espaces I_1, I_2 ci-dessus.

b) Calculer un système d'équations minimal puis une base pour les sous-espaces K_1, K_2 ci-dessus.

6. Démontrer

Démontrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.