# Corrigé

**1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.**

La fonction $f$ est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-1,\infty[$. Pour obtenir son DL, je la mets sous forme composée:

$$f(x) = \sqrt{1+u} \qquad \text{avec} \qquad u = \sqrt{1+x}.$$

Le DL de $u$ est standard: $$u =_{0,2} \quad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

[Inutile de rappeler que $g =_{0,2} h$ signifie: $g$ et $h$ ont même DL en 0 à l'ordre 2.]

et le théorème de composition justifie

$$f(x) = \sqrt{1+u} =_{0,2} \quad \sqrt{1+1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}}.$$

Je mets $\sqrt{2}$ en facteur, pour faire apparaître la composition de mon choix:

$$f(x) =_{0,2} \quad \sqrt{2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}} =_{0,2} \quad \sqrt{2}\,\sqrt{1+v} \qquad \text{avec} \qquad v = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16},$$

et j'invoque à nouveau le théorème de composition pour justifier

$$f(x) =_{0,2} \sqrt{2}\,\left(1 + \frac{v}{2} - \frac{v^2}{8}\right).$$

Je remplace $v$ par sa valeur, et, en tronquant comme il se doit, j'obtiens

$$f(x) =_{0,2} \sqrt{2}\,\left(1 + \left(\frac{x}{8} - \frac{x^2}{32}\right) - \frac{x^2}{128}\right).$$

En regroupant les termes de même degré, j'arrive au DL cherché:

$$DL_{0,2}f = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\,x}{8} - \frac{5\sqrt{2}\,x^2}{128}.$$

*Remarque fayote.* Par identification avec le DL de Taylor, à savoir: $DL_{0,2}f = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$, j'obtiens $f(0) = \sqrt{2}$, $f'(0) = \sqrt{2}/8$, $f''(0) = -5\sqrt{2}/64$ (et je me demande si le calcul direct de la dérivée seconde aurait été aussi cool).