MIAS-SM TC Corrigé UMED 06/02/01

1. Expliquer comment, avec une calculette qui n'affiche que huit des dix chiffres qu'elle connaît pour $\sqrt{2}$, on peut déterminer le neuvième.

   Réponse: Quand on tape $\sqrt{2}$, plus exactement 2 puis $\sqrt{\ }$, la calculette affiche un nombre décimal r de la forme 1.414abcd. Si on continue à taper $-r$ (c'est-à-dire -1.414abcd), elle affiche un nombre décimal x, et la somme $r + x$ approche $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près, ce qui donne le neuvième chiffre cherché.

2. a) Nier l'énoncé suivant : $\forall x, y \in \mathbf{R}, x \neq y \Longrightarrow \forall p \in \mathbf{N}, x^{2p+1} \neq y^{2p+1}$.

   b) Evaluer l'énoncé précédent. Justifier.

   c) Exprimez informellement l'énoncé que vous avez prouvé en b).

   Réponse: a) $\exists x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq y$ et $\exists p \in \mathbf{N}$, $x^{2p+1} = y^{2p+1}$.

   b) L'énoncé initial est vrai. En effet, pour tout p entier, $2p+1$ est impair et la fonction $x \mapsto x^{2p+1}$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Si x, y, p sont donnés avec $x \neq y$, on peut supposer par exemple $x < y$. Par le résultat précédent, on a $x^{2p+1} < y^{2p+1}$ ce qui assure que ces deux nombres sont distincts.

   c) Quand on élève deux nombres distincts à une même puissance impaire, on obtient encore deux nombres distincts.

3. Calculer (sans justification) la partie suivante : $\{6p + 5q | p, q \in \mathbf{N}\}$.

   Réponse: En faisant varier (p, q) dans l'ordre $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), \ldots$, ou trouve les nombres : $0, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 20, 21, \ldots$.
   La partie donnée est égale à $\mathbf{N} - \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 13,\ 14,\ 19\}$.

4. Etant donnée une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ (et à valeurs réelles), formaliser les énoncés suivants :

   a) f est décroissante.

   b) Si f est à la fois croissante et décroissante, alors elle est forcément constante.

   Réponse: a) $\forall x, y \in \mathbf{R}, x \leq y \Longrightarrow f(y) \leq f(x)$.

   b) $(\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \leq y \Longrightarrow f(y) \leq f(x))$ et $(\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)) \Longrightarrow$
   $\exists c \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = c$.

5. Le professeur pressé a écrit:
   Si $|b|$ est plus petit que $2|a|$, alors soit $|a + b|$, soit $|a - b|$ est plus petit que $|a|$.

   a) S'agit-il plutôt de nombres rationnels, réels ou complexes ?

   b) Formaliser cet énoncé de façon qu'il soit vrai.

   c) Rédigez une preuve claire et concise pour cet énoncé (cinq lignes devraient suffire).

   Réponse: a) L'énoncé est faux pour des complexes (prendre par exemple $a = 1$ et $b = i$). Il est vrai pour des réels, et donc aussi pour des rationnels.

   b) $\forall a, b \in \mathbf{R}, |b| \leq 2|a| \Longrightarrow |a + b| \leq |a|$ ou $|a - b| \leq |a|$.

   c) Soient a et b avec $|b| \leq 2|a|$. La conclusion cherchée ne change pas si on change le signe de a et/ou celui de b. Supposons donc a et b positifs. Dans ce cas, l'hypothèse devient $b \leq 2a$. On a $-a = a - 2a \leq a - b \leq a$, d'où on déduit $|a - b| \leq |a|$.

6. a) Expliquer en quelques lignes le principe de la représentation binaire des nombres entiers.

   b) Donner la représentation binaire de 8.

   c) Comment multiplie-t-on par 4 dans cette représentation?

   d) Comment ajoute-t-on 1 dans cette représentation?

   Réponse: a) Les entiers non nuls sont représentés par une suite de zéros et de uns commençant par un un. Zéro reste zéro, un reste un. Ajouter un zéro à droite revient à multiplier par deux. Si le chiffre de droite est un zéro, le remplacer par un revient à ajouter un.

   b) 1000.

   c) Pour x non nul, la représentation binaire de $4x$ s'obtient en ajoutant deux zéros à droite à celle de x.

   d) Pour x non nul, la représentation binaire de $x+1$ s'obtient de la façon suivante: si la représentation binaire de x comporte un zéro, on y remplace le zéro le plus à droite par un un, et (s'il y a lieu) tous les uns qui le suivent par zéro; si au contraire la représentation binaire de x ne comporte que des uns, on remplace tous ces uns par des zéros et on ajoute un un à gauche.

7. Choisissez une formalisation de l'énoncé suivant : une équation du second degré à coefficients réels sans solution réelle admet deux solutions complexes conjuguées.

   Réponse: $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ et $(\forall x \in \mathbf{R},\ ax^2 + bx + c \neq 0) \implies$
   $\exists z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, $az^2 + bz + c = 0$ et $a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c = 0$.

8. En LL (*Logique Linéaire*), on peut utiliser un système de priorité pour trois opérations, dont deux sont binaires et une unaire), notées $\multimap$ (*l'implication linéaire*), & (*la conjonction additive*), et ! (*la modalité*).

   a) L'expression $!\,(a \,\&\, !\,(b \multimap b))$ est sans parenthèses inutiles. Qu'en déduisez-vous concernant la modalité?

   b) L'expression $(a \multimap !\, b) \,\&\, (!\, b \multimap a)$ est elle aussi sans parenthèses inutiles. Imaginer un système de priorité compatible avec ces données.

   c) Enlever les parenthèses économisées par votre système dans l'expression suivante :

   $((!\, a) \,\&\, !\, b) \multimap ((!\, c) \,\&\, !\, (b \,\&\, !\, a))$.

   Réponse: a) La modalité est prioritaire sur l'implication linéaire (sinon on n'aurait pas besoin des parenthèses intérieures) et sur la conjonction additive (sinon on n'aurait pas besoin des parenthèses extérieures).

   b) Dans mon système, la modalité est prioritaire sur la conjonction, qui est prioritaire sur l'implication. Pour deux conjonctions, ou deux implications, celle de gauche est prioritaire.

   c) $!\, a \,\&\, !\, b \multimap !\, c \,\&\, !\, (b \,\&\, !\, a)$.