Pour quelles valeurs de x entier entre 10 et 1000, le réel $\frac{1}{x}$ est-il décimal ?

Supposons que $1/x$ (qui est rationnel) est décimal. Il s'écrit alors $\frac{a}{10^k}$ avec a et k entiers. On en déduit une égalité entre entiers : $10^k = ax$.
La décomposition en facteurs premiers de 10^k s'écrit $2^k\,5^k$. Les seuls facteurs premiers de la décomposition de x sont donc 2 et 5. Ceci permet déjà d'énumérer tous les entiers entre 10 et 1000 susceptibles de convenir. Ce sont :

$$16, 32, 64, 128, 256, 512, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 25, 50, 100, 200, 400, 800$$
$$125, 250, 500, 1000, 625$$

Expliquez comment on les a classés ici.
On peut vérifier qu'ils conviennent tous et ceci constituerait une preuve.
On peut aussi remarquer que si la décomposition en facteurs premiers de x ne comprend que des 2 et des 5, alors x s'écrit

$$x = 2^i 5^j$$

avec i et j entiers. On voit alors que la fraction

$$\frac{2^j 5^i}{10^{i+j}}$$

est une écriture possible de x qui est donc toujours décimal.

Pour quelles valeurs de x entier entre 10 et 1000, le réel $\sqrt{\frac{3}{x}}$ est-il décimal ?

Supposons que $\sqrt{\frac{3}{x}}$ est décimal. Il s'écrit alors $\frac{a}{10^k}$ avec a et k entiers. En élevant au carré, on en déduit une égalité entre rationnels

$$\frac{3}{x} = \frac{a^2}{10^{2k}}$$

puis une égalité entre entiers : $3\ 10^{2k} = a^2 x$.
La décomposition de $3\,10^{2k}$ en facteurs premiers est donc $2^{2k}\,3\,5^{2k}$. C'est aussi la décomposition en facteurs premiers de a^2x. Si 3 est un facteur premier de a, alors 3^2 est un facteur de a^2, donc de a^2x, ce qui n'est pas. La seule possibilité est que 3 soit un facteur de x qui s'écrit alors $3y$ avec y entier vérifiant $10^{2k} = a^2 y$.
Les seuls facteurs premiers de la décomposition de y sont donc 2 et 5. Leurs puissances sont paires puisque c'est le cas pour 10^{2k} et a^2.
À ce stade, on peut dire que, si $\sqrt{\frac{3}{x}}$ est décimal, x s'écrit $2^{2i}\,3\,5^{2j}$ avec i et j entiers.
Entre 10 et 1000, on obtient :

x	$\vdots$	12	48	192	768	75	300
$\sqrt{\frac{3}{x}}$	$\vdots$	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,2	0,1

On peut aussi faire une démonstration qui sera valable pour tous les x entiers et pas seulement pour ceux de [10..1000].
Si x s'écrit $2^{2i}\,3\,5^{2j}$ avec i et j entiers, alors :

$$\sqrt{\frac{3}{2^{2i}\,3\ 5^{2j}}} = \frac{1}{2^i\,5^j} = \frac{2^j\,5^i}{10^{i+j}}$$

est un nombre décimal. On a donc trouvé la condition nécessaire et suffisante sur x entier pour que $\sqrt{\frac{3}{x}}$ soit décimal.