Maths cours6: **Développements limités** 15/11/00 Deug MIASSM TC

Définition. Soit I un intervalle non réduit à un point, a un point de I, f une fonction définie sur I, n un entier et P un polynôme de degré au plus n. On dit que f admet P pour DL à l'ordre n en a si le quotient de $f-P$ par $(x-a)^n$ admet 0 pour limite en a.

Exemple: $n=0$, c'est la continuit4; n=1, c'est la dérivabilité.

Théorème. C'est local (bof?) et (surtout) y'a unicité (grâce à l'hypothèse sur I).

Conséquence. On parle donc DU DL à l'ordre n en a de f. Cela recouvre le fait qu'il y a une application DL, définie sur un ensemble qu'on ne nomme ni ne note. En fait c'est plutôt une famille d'applications. Il faudrait écrire $DL(I,a,n,f)$.Je vais plutôt écrire $DL(f,n,a)$, parce que les arguments sont dans cet ordre sur la TI92. On acceptera aussi d'écrire et surtout de lire par exemple $DL_{3,\pi}(x+\sin x)$, avec l'abus usuel qui consiste à écrire $x+\sin x$ pour $x \mapsto x+\sin x$). Enfin, pour les calculs, on écrira $f =_{3,\pi} g$ pour exprimer que f et g ont le même $DL_{3,\pi}$. Cette notation fait l'économie des $\epsilon(x)$ et autres $o(x)$, sans parler des commentaires censés les accompagner. En toute logique, on acceptera donc qu'un DL soit rendu sous forme $f(x) =_{n,a} P(x)$, à condition que le membre de droite soit bien un polynôme de degré au plus n, présenté comme somme de puissances croissantes de $x-a$, par exemple $\ln x =_{2,1} x-1-(x-1)^2/2$.

Bien sûr, les fortes têtes peuvent donner leur résultat sous la forme traditionnelle:
$\ln(x+x^9) = x-1-(x-1)^2/2+(x-1)^2\epsilon(x)$ ou
$\ln(x+x^9) = x-1-(x-1)^2/2+(x-1)^2\epsilon(x-1)$
à charge pour eux (elles?) dans ce cas de préciser où leur ϵ tend vers quoi.

———-

Voici les résultats qu'on peut invoquer dans la solution des exercices.

Taylor-Young: Toute fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle y admet en tout point a un DL_n, P, caractérisé par le fait que f et P ont les mêmes dérivées jusqu'à l'ordre n en a.

Polynômes: pour calculer le $DL_{n,a}$ d'un polynôme, on le développe suivant les puissances croissantes de $x-a$, en ne gardant que les monômes de degré au plus n.

Opérations: si f et g sont deux fonctions indéfiniment dérivables sur un même intervalle I, c et d deux réels et a un point de I, alors, pour tout n, on a $cf+dg =_{n,a} cDL_{n,a}f+dDL_{n,a}g$ et $fg =_{n,a} DL_{n,a}f\,.\,DL_{n,a}g$. Autrement dit, pour calculer le DL d'une somme ou d'un produit, on peut remplacer chaque terme et chaque facteur par son DL.

Dérivation: Si f est indéfiniment dérivable sur un intervalle I, et a est un point de I, alors, pour tout n, $DL_{n+1,a}(f)' = DL_{n,a}(f')$. On s'en sert plutôt pour calculer le DL de gauche connaissant celui de droite.

Composition: Soit f est indéfiniment dérivable sur un intervalle I, et g indéfiniment dérivable sur un intervalle J, avec $f(I)$ contenu dans J. Soit a dans I et $b=f(a)$. Alors on a, pour tout n,

$g\circ f =_{n,a} DL_{n,b}g\circ f =_{n,a} g\circ DL_{n,a}f =_{n,a} DL_{n,b}g\circ DL_{n,a}f$. Autrement dit, pour calculer le DL d'un composé, on peut remplacer chaque composant par son DL au même ordre et **au point adéquat**.

Division: si f et g sont deux fonctions indéfiniment dérivables sur un même intervalle I s'annulant respectivement et exactement p et q fois en a avec $p >= q$. On supppose que g ne s'annule pas sur $I-\{a\}$. Alors f/g se prolonge en une fonction h indéfiniment dérivable sur I. Et alors on peut calculer le DL de h en utilisant $f=gh$, mais attention aux décalages. ——-