Université de Nice
Mathématiques

Année 2000-2001
Deug Sciences MIASSM TC

Développements limités corrigés.

Exercice 1 : Soit $f(x) = \sqrt{2\sin x}$. Calculer $\mathrm{DL}(f, 2, \pi/2)$.

Réponse: Par la formule de Taylor, on a $\mathrm{DL}(\sin(x), 2, \pi/2) = 1 - \frac{1}{2}(x-\pi/2)^2$.
Par le théorème de la décomposition des DL's, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{DL}(\sqrt{2\sin(x)}, 2, \pi/2) &= \sqrt{2}\,\mathrm{DL}(\sqrt{1-\frac{1}{2}(x-\pi/2)^2}, 2, \pi/2)\\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{DL}(\sqrt{1+u}, 2, 0)\end{aligned}$$

avec $u = -\frac{(x-\pi/2)^2}{2}$ (on a bien $x = 0 \Rightarrow u = 0$). On sait que $\mathrm{DL}(\sqrt{1+u}, 2, 0) = 1 + u/2 - u^2/8$. On remplace u par $-\frac{(x-\pi/2)^2}{2}$ et on tronque l'expression à l'ordre 2 **par rapport aux puissances de** $(x - \pi/2)$:

$$\mathrm{DL}(f, 2, \pi/2) = \sqrt{2}(1 - \frac{1}{4}(x-\pi/2)^2).$$

Exercice 2 : Calculer $\mathrm{DL}(f, 2, 0)$ pour la fonction

$$f(x) = \frac{3e^x}{1+\ln(1+x)}.$$

Réponse: On a $\mathrm{DL}(1+\ln(1+x), 2, 0) = 1 + x - x^2/2$.
Donc

$$\mathrm{DL}(\frac{1}{1+\ln(1+x)}, 2, 0) = \mathrm{DL}(\frac{1}{1+x-x^2/2}, 2, 0).$$

On pose $u = x - x^2/2$ (on a bien $x = 0 \Rightarrow u = 0$). En tenant compte de $\mathrm{DL}(\frac{1}{1+u}, 2, 0) = 1 - u + u^2$, on obtient en remplaçant u par $x - x^2/2$ et en tronquant à l'ordre 2 par rapport aux puissances de x:

$$\mathrm{DL}(\frac{1}{1+x-x^2/2}, 2, 0) = T_2(1 - (x - x^2/2) + (x - x^2/2)^2) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2.$$

On multiplie ce DL avec le DL de $3e^x$, on tronque à l'ordre 2, et on a

$$\mathrm{DL}(f, 2, 0) = T_2(3(1 + x + \frac{x^2}{2})(1 - x + \frac{3}{2}x^2)) = 3 + 3x^2.$$