MIAS-SM 1 TC maths 01/02/01 durée: 3h

Calculettes et documents interdits.

1. (sur 2)

   a) Calculer $(2+i)^2$.

   b) Trouver les racines de l'équation à l'inconnue complexe z:

   $z^2 + (4+3i)z + 1 + 5i = 0$.

2. (sur 2.5)

   a) Donner le meilleur encadrement de $\frac{y+3}{x-1}$ quand x et y sont deux nombres réels de l'intervalle $[2,5]$.

   b) Même question pour $\frac{x^2+3}{x-1}$ (et x dans $[2,5]$).

   c) Même question pour $\frac{x+3}{x^2-1}$ (et x dans $[2,5]$).

3. (sur 2.5)

   On note f la fonction définie par $f(x) = 27x - x^3$.

   a) Indiquer le plus grand intervalle contenant 0 où (la restriction de) f admet une fonction réciproque **dérivable**.

   b) On note g cette fonction réciproque; calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

   c) Calculer $g(-26)$ et $g'(-26)$.

4. (sur 2.5)

   Calculer $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1-4x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ en posant $x = \frac{\sin t}{2}$.

5. (sur 1)

   Pour l'application suivante, préciser le contexte, la source et le but et écrire la matrice.

   $(x,y,z) \longmapsto (yw + zu, xv - yu)$.

6. (sur 4)

   On considère la matrice $(3,2)$, notée A, et définie par $A_{ij} = 2i - j$, et la matrice

   $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

   Calculer, quand c'est possible, les sommes $A+B$ et $B+A$, les produits AB et BA et les inverses de A et B.

7. (sur 2.5)

   Calculer en fonction du réel m l'intersection dans $\mathbf{R}^3$ de la droite passant par les points $(1, -1, 0)$ et $(2, 0, -1)$ avec le plan d'équation $mx - my + z = 1$.

8. (sur 3)

   Compléter la preuve suivante:

   Théorème: Le développement limité du produit d'une fonction par un nombre est le produit par ce nombre du développement limité de la fonction.

   Preuve. Soit donc I un intervalle (non réduit à un point) de $\mathbf{R}$, a un point de I, et n un entier naturel. Soit λ un réel quelconque et f une fonction définie sur et admettant pour développement limité à l'ordre n en a le polynôme P (qui est donc de degré au plus). Nos hypothèses signifient que le quotient $\epsilon'(x) := \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}$ tend vers zéro quand x tend vers en restant dans . Il nous faut montrer que la fonction λf admet pour développement limité à l'ordre n en a le polynôme λP. c'est-à-dire que le quotient $\epsilon(x) := \frac{\qquad\qquad}{(x-a)^n}$ tend vers zéro dans les mêmes conditions. Ceci résulte du théorème sur la limite , car on vérifie facilement que $\epsilon(x)$ est .