LECTURE

Le principe d'inclusion et d'exclusion, par VK

Désignons par $|A|$ le nombre d' éléments d'une partie A (d'un ensemble fini E qui n'intervient pas dans l'histoire. Pour deux parties A_1 et A_2 on a

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \qquad (*).$$

En effet, si on compte les éléments de $A_1 \cup A_2$, on peut compter d'abord ceux de A_1 et A_2 séparément, puis ajouter ces deux nombres, puis soustraire le nombre des éléments de $A_1 \cap A_2$, qui seraient autrement comptés deux fois.

La formule $(*)$ se généralise au cas d'un nombre n quelconque de parties A_i. Par exemple pour $n = 3$ on a la formule suivante:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \ .$$

(On compte d'abord les éléments de A_1, A_2 et A_3 séparément, puis on ajoute ces trois nombres, puis on soustrait de leur somme la somme des nombres d'éléments des trois intersections deux à deux $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_2 \cap A_3$ qui ont été comptés deux fois sauf ceux de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ qui ont été comptés trois fois; à ce stade, les éléments de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ont été comptés zéro fois c'est pourquoi on ajoute $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.)

La formule pour n arbitraire est de la forme

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} |A_{j_1} \cap A_{j_2}| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \ .$$

ou plus précisément:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n} |A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_r} \cap \ldots \cap A_{j_k}| \ .$$

On peut la démontrer par récurrence en utilisant la formule obtenue pour $n = 2$:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n| \ .$$

Le lecteur pourra certainement compléter cette démonstration.