MIAS-SM TC UMED 06/02/01

Calculettes et documents interdits. Barème: $8 \times 3 = 24 > 20 = \text{note_max}$.

1. Expliquer comment, avec une calculette qui n'affiche que huit des dix chiffres qu'elle connaît pour $\sqrt{2}$, on peut déterminer le neuvième.

2. a) Nier l'énoncé suivant : $\forall x, y \in \mathbf{R}, x \neq y \Longrightarrow \forall p \in \mathbf{N}, x^{2p+1} \neq y^{2p+1}$.

   b) Evaluer l'énoncé précédent. Justifier.

   c) Exprimez informellement l'énoncé que vous avez prouvé en b).

3. Calculer (sans justification) la partie suivante : $\{6p + 5q | p, q \in \mathbf{N}\}$.

4. Etant donnée une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ (et à valeurs réelles), formaliser les énoncés suivants :

   a) f est décroissante.

   b) Si f est à la fois croissante et décroissante, alors elle est forcément constante.

5. Le professeur pressé a écrit:
   Si $|b|$ est plus petit que $2|a|$, alors soit $|a + b|$, soit $|a - b|$ est plus petit que $|a|$.

   a) S'agit-il plutôt de nombres rationnels, réels ou complexes ?

   b) Formaliser cet énoncé de façon qu'il soit vrai.

   c) Rédigez une preuve claire et concise pour cet énoncé (cinq lignes devraient suffire).

6. a) Expliquer en quelques lignes le principe de la représentation binaire des nombres entiers.

   b) Donner la représentation binaire de 8.

   c) Comment multiplie-t-on par 4 dans cette représentation?

   d) Comment ajoute-t-on 1 dans cette représentation?

7. Choisissez une formalisation de l'énoncé suivant : une équation du second degré à coefficients réels sans solution réelle admet deux solutions complexes conjuguées.

8. En LL (*Logique Linéaire*), on peut utiliser un système de priorité pour trois opérations, dont deux sont binaires et une unaire), notées $\multimap$ (*l'implication linéaire*), & (*la conjonction additive*), et ! (*la modalité*).

   a) L'expression $!(a \,\&\, !(b \multimap b))$ est sans parenthèses inutiles. Qu'en déduisez-vous concernant la modalité?

   b) L'expression $(a \multimap !\, b) \,\&\, (!\, b \multimap a)$ est elle aussi sans parenthèses inutiles. Imaginer un système de priorité compatible avec ces données.

   c) Enlever les parenthèses économisées par votre système dans l'expression suivante :
   $((!\, a) \,\&\, !\, b) \multimap ((!\, c) \,\&\, !\, (b \,\&\, !\, a))$.