MIAS-SM TC maths 18/11/00

Calculettes et documents interdits. Durée: 1h20.

1. (sur 5=4+1) Calculer et dessiner les racines quatrièmes de $8i - 8\sqrt{3}$ (on rappelle que $\sin \frac{\pi}{6}$ égale $\frac{1}{2}$).

2. (sur 5=2+1+1+1)

   a) Etudier (domaine de définition, variations, concavité, branches infinies, position par rapport aux asymptotes éventuelles) le graphe de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x^2/2}$.

   b) Préciser où est atteint son minimum et combien il vaut.

   c) Tracer le graphe. Présente-t-il une symétrie?

   d) Montrer que, pour $x \geq 4$, on a $f(x) \leq \frac{1}{2^6}$.

3. (sur 5=2+3)

   On note f la fonction définie par $f(x) = x + \sin x$.

   a) Indiquer un intervalle contenant 0 et 2 où (la restriction de) f admet une fonction réciproque **dérivable**.

   b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$ puis $f^{-1}(1 + \frac{\pi}{2})$ et $(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{2})$.

4. (sur 5= 2+2+1)

   a) Expliquer où et pourquoi la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})$ est continue.

   b) Soit a un nombre réel. Expliquer où et pourquoi la fonction $g : x \longmapsto ax + e^{\frac{1}{x-1}}$ est continue.

   c)

   Trouver pour quelle valeur de a la fonction h définie par

$$h(x) = \begin{cases} \ln(1 - \sqrt{x^2 - 1}) & \text{si} \quad x \geq 1, \\ ax + e^{\frac{1}{x-1}} & \text{sinon} \end{cases}$$

   est continue (en tout point où elle est définie).