Parties

1. **Calculer la partie suivante, après avoir traduit informellement sa définition**

   $\{x \in \mathbf{N} | \exists n \in \mathbf{N},\, nx \leq 5\}$ $\quad$ $\{x \in \mathbf{Z} | \forall n \in \mathbf{N}^*,\, nx \leq 5\}$
   $\{x \in \mathbf{R} | \exists n \in \mathbf{N},\, x^n \geq 5\}$ $\quad$ $\{x \in \mathbf{R}^* | \forall n \in \mathbf{N}^*,\, nx \leq 5\}$
   $\{x \in \mathbf{R} | \forall n \in \mathbf{N},\, x \leq n^3 - 15n + 28\}$ $\quad$ $\{x \in \mathbf{N} | \exists n \in \mathbf{N},\, n \leq 5 \text{ et } n^2 \leq x \leq n^2 + 2n\}$
   $\{x \in \mathbf{N} | \forall n \in \mathbf{N},\, n \leq 5 \text{ ou } n^2 \leq x \leq n^2 + 2n\}$ $\quad$ $\{x \in \mathbf{N} | \exists n \in \mathbf{N},\, n^2 \leq x \leq n^2 + 2n \Longrightarrow n \leq 5\}$

2. **Décrivez la partie suivante en français et indiquez le plus grand intervalle contenu dedans, puis le plus petit intervalle la contenant:**

   $\{7p + 4q | p, q \in \mathbf{N}\}$ $\quad$ $\{p^2 + q | p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Z}, |q| \leq 50\}$
   $\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} | p, q \in \mathbf{N}^*, p \neq q\}$ $\quad$ $\{x^3 - 6x + 2 | x \in \mathbf{R}, |x| < a\}$

3. **Triangles dans $\mathbf{R}^2$**

   Qu'est-ce qu'un triangle? un sommet d'un triangle? un côté d'un triangle? Comment définir les angles d'un triangle pour que tout triangle soit l'intersection de ses angles? Si la réunion de deux triangles est un triangle, est-ce que l'un contient l'autre? Même question avec trois triangles, puis avec l'intersection.

4. **Chat alors!**

   28% des foyers français possédent (au moins) un chien, 25% (au moins) un chat, et 45% (au moins) un chien ou un chat (*Le Monde*, 27.9.99, d'après une étude de la Chambre Syndicale des Fabricants d'Aliments Préparés pour Animaux Familiers). Peut-on en déduire le nombre de foyers qui ont (au moins) un chien et un chat ? qui n'ont ni l'un ni l'autre ?

5. **Réunions de famille**

   Pour n entier, $n \geq 1$, on note

   $$\begin{aligned} A_n &= \left]0, \frac{1}{n}\right[\ , A'_n = \left[0, \frac{1}{n}\right] \ , \\ B_n &= \left]-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right[\ , B'_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \ . \end{aligned}$$

   Déterminer réunion et intersection de chacune de ces quatre familles de parties de $\mathbb{R}$.

6. **Image**

   Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \pi$. Déterminer $f(]-1/2, 1/2[)$.

7. **Qu'avons-nous à prouver?**

   a) Déduire des propriétés de la conjonction, de la disjonction et de la négation, les propriétés analogues de l'intersection, de la réunion, et du passage au complémentaire.

   b) Démontrer l'associativité de la composition.

Petit lexique

$\{x \in E | P(x)\}$: la partie de E formée des élements vérifiant la propriété P;
toutes les parties de E sont de cette forme.

$\mathcal{P}(E)$: l'ensemble des parties de l'ensemble E.

$A = B$: les parties A et B de E sont égales; on devrait écrire $A =_{\mathcal{P}(E)} B$;
par définition de cette égalité, $\{x \in E | P(x)\} = \{x \in E | Q(x)\}$ ssi P et Q sont équivalentes.

$x \in A$: x est un élément de la partie A de E; on devrait écrire $x \in_E A$;
par définition $x \in \{x \in E | P(x)\}$ ssi x vérifie P.

$A \subset B$ (ou encore $B \supset A$) : la partie A est contenue dans la partie B; on devrait écrire $A \subset_E B$;
par définition $A \subset B$ ssi $x \in A$ implique $x \in B$.

$A \cup B$: la réunion de A et B; on devrait écrire $A \cup_E B$;
par définition $x \in A \cup B$ équivaut à : $x \in A$ **ou** $x \in B$.

$A \cap B$: l'intersection de A et B; on devrait écrire plus souvent $A \cap_E B$;
par définition $x \in A \cap B$ équivaut à : $x \in A$ **et** $x \in B$.

$\complement_E A$: complémentaire de A dans E; on écrit trop souvent $\complement A$;
par définition x appartient à $\complement_E A$ ssi $(x \in A)$ est faux.

$x \longmapsto F$: l'application qui à x associe F; ici F est une formule faisant intervenir (ou non) x;
toutes les applications sont de cette forme.

$f : X \to Y$: f est une application de l'ensemble X dans l'ensemble Y.

$f(a)$: l'image par f de l'élément a (de X) ;
par définition $(x \mapsto F)(a)$ s'obtient en remplaçant x par a dans F.

$f(A)$: l'image par f de la partie A (de X) ;
par définition y appartient à $f(A)$ ssi il existe x dans A avec $y = f(x)$.

$g \circ f$: l'application composée de $f : X \to Y$ (d'abord) et de $g : Y \to Z$; on devrait écrire $g \circ_{X,Y,Z} f$;
par définition, pour tout x (de X), $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Pièges. On a toujours $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$, mais en général on a $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$, et il n'y a aucune relation d'inclusion entre $f(\complement_X A)$ et $\complement_Y f(A)$.