Preuves

1. **Le professeur pressé a écrit:**

   Proposition: Si a et b sont deux nombres complexes, on a $a.b = 0 \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

   Preuve. Si par exemple $a = 0$, alors nous savons déjà que $a.b = 0.b = 0$. Supposons $a.b = 0$ et $a \neq 0$. Il vient $b = 1.b = ((1/a).a).b = (1/a).(a.b) = (1/a).0 = 0$.

   —-

   i) Cette preuve commence-t-elle par un dépliage (de $\Longleftrightarrow$) ou par un tiers-exclu ($a = 0$ ou $a \neq 0$), ou encore autrement?

   ii) Recenser les buts intermédiaires, et le contexte dans lequel chacun est énoncé puis prouvé.

   iii) Recenser les énoncés connus qui sont utilisés et indiquer avec quels arguments ils le sont.

   iv) Rédiger une preuve détaillée.

   iv) Discuter l'énoncé analogue et l'adaptation de sa preuve dans le cas des fonctions, ou des polynômes.

2. **Le professeur pressé a écrit:**

   Proposition: Si b est non nul, $|a| \leq |a + b|$ et $|a| \leq |a - b|$ implique $|a| \leq |b|/2$.

   Preuve. Par homogénéité, on peut diviser par b. Il faut donc démontrer
   $|a| \leq |a + 1|$ et $|a| \leq |a - 1| \Longrightarrow |a| \leq 1/2$.
   On observe que le signe de a est indifférent, supposons-le positif. La première inégalité est inutile mais la seconde donne le résultat.

   —-

   i) S'agit-il de nombres réels ou complexes?

   ii) Dans quel ordre s'effectuent l'introduction des hypothèses dans le contexte et la réécriture des inégalités?

   iii) Rédiger une preuve détaillée de cette réponse, qui mette en particulier en évidence (s'il y a lieu) les introductions, les buts intermédiaires, les utilisations de résultats connus (avec les arguments correspondants), les exploitations du tiers-exclu.

3. **Le professeur pressé a écrit:**

   Exercice: Résoudre l'équation $1 + 2z + 2z^2 + ... + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

   Solution: En multipliant le premier membre par $1-z$, on se ramène à l'équation $(1+z)(1-z^n) = 0$ dont la racine $z = 1$ doit être exclue.

   —-

   i) Enoncer correctement la réponse.

   ii) Rédiger une preuve qui explicite tous les ingrédients.

4. **Récurrence:**

   Dire (sans langue de bois) ce qu'est une fonction indéfiniment dérivable. Démontrer que si P est un polynôme, la fonction $P(x)e^{-x^2}$ est indéfiniment dérivable et tend vers zéro ainsi que toutes ses dérivées lorsque x tend vers l'infini; on formulera avec le plus grand soin les éventuelles hypothèses de récurrence.