Intégration

1. Intégration par parties

a) Calculer $\displaystyle\int_a^b \cos(\alpha x)e^{\beta x}\,dx$.

b) Calculer les intégrales (de Wallis):

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

2. Calculer par changement de variables

a) donné explicitement:

$$\int_1^2 \frac{\ln s}{s}\,ds \qquad (\text{poser } s = e^t) \qquad \int_1^2 \frac{s+2}{\sqrt{5-s^2}}\,ds \qquad (\text{poser } s = \sqrt{5}\,\sin t).$$

b) donné implicitement:

$$\int_1^2 \frac{\ln s}{s^2}\,ds \qquad (\text{poser } t = \ln s) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s ds \qquad (\text{poser } t = \cos s).$$

3. E-T 1

Calculer

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x}\,dx.$$

4. E-T 2

On définit la fonction G par la formule

$$G(t) = \int_{-\pi/2}^{2t} \frac{\sin x}{2\cos^2 x + \sin^2 x}\,dx.$$

a) Calculer G' et montrer qu'on a, pour tout t entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$,

$$\sin 2t \le G'(t) \le 2\sin 2t.$$

b) Faire un croquis (très approximatif) du graphe de G' sur $[-\frac{\pi}{4}, 2\pi]$.

c) Calculer $G(0)$ puis $G(\frac{\pi}{4})$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, calculer $G(n\frac{\pi}{4})$. Est-ce que $G(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$?

d) Calculer le DL à l'ordre 2 de $2\cos^2 2x + \sin^2 2x$ en $\frac{\pi}{2}$.

e) Calculer le DL à l'ordre 2 de G en $\frac{\pi}{2}$.