**Exercice 3.e** : résoudre $\dfrac{x-2}{x+3} \leqslant \dfrac{3-x}{2x+1}$.

**Solution longue**

On cherche l'ensemble des réels $x$ vérifiant $x \neq -3$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$, et

$$\frac{x-2}{x+3} \leqslant \frac{3-x}{2x+1} \ .$$

On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x-2}{x+3} \leqslant \frac{3-x}{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x+3} - \frac{3-x}{2x+1} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x^2-3x-11}{(x+3)(2x+1)} \leqslant 0 \ .$$

On va résoudre la dernière inéquation, par l'étude du signe du premier membre noté $f(x)$.

Le numérateur est un trinôme du second degré, dont le delta vaut : $9 + 4 * 3 * 11 = 141 > 0$. Il a donc deux racines réelles qui sont $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{141}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{141}}{6}$.

On vérifie facilement $-3 < x_1 < -\dfrac{1}{2} < x_2$.

On obtient le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-3$ | | $x_1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $3x^2-3x-11$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ |

L'ensemble des réels vérifiant l'inéquation est donc :

$$S = \left]-3,\ \frac{3-\sqrt{141}}{6}\right] \cup \left]-\frac{1}{2},\ \frac{3+\sqrt{141}}{6}\right] \ .$$

**Solution courte**

L'inéquation est définie pour $x \neq -3$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

On a :

$$\frac{x-2}{x+3} \leqslant \frac{3-x}{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{x+3} - \frac{3-x}{2x+1} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x^2-3x-11}{(x+3)(2x+1)} \leqslant 0 \ .$$

Signe de $3x^2 - 3x - 11$:

$\Delta = 9 + 4 * 3 * 11 = 141 > 0$; les racines sont $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{141}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{141}}{6}$.

On a $-3 < x_1 < -\dfrac{1}{2} < x_2$, d'où le tableau de signes: (comme plus haut).

L'ensemble des solutions est:

$$S = \left]-3,\ \frac{3-\sqrt{141}}{6}\right] \cup \left]-\frac{1}{2},\ \frac{3+\sqrt{141}}{6}\right] \ .$$