Maths Exos1:

Inégalités

30/09/02 Deug MIASSM TC

1. Complétez la réponse suivante, en ne mentionnant que des intervalles de monotonie maximaux:

   Question: Résoudre dans $\mathbf{R}$: $\sqrt{x+8}-2 \geq \sqrt{2-x}$.

   Réponse: Pour $x < -8$ et pour $x > 2$, l'inégalité est mal définie donc n'est pas vérifiée.

   Il reste à traiter le cas $x \in [-8,\,2]$. Dans ce contexte, on obtient:

   $\sqrt{x+8}-2 \geq \sqrt{2-x}$

   $\iff \sqrt{x+8} \geq \sqrt{2-x}+2$ en appliquant à $\underline{\sqrt{x+8}-2}$ et $\underline{\sqrt{2-x}}$:
   $\underline{y \mapsto \text{_ _ _ _ _ _ _ _ _}}$ est strictement croissante sur $\underline{\mathbf{R}}$;

   $\iff x+8 \geq 2-x+4\sqrt{2-x}+4$ en appliquant à $\underline{\sqrt{x+8}}$ et $\underline{\sqrt{2-x}+2}$ qui sont <u>positifs</u>:
   $\underline{y \mapsto y^2}$ est strictement croissante sur _ _ _ _ _ _ _ _ _;

   $\iff 2x+2 \geq 4\sqrt{2-x}$ en appliquant à _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ :
   $\underline{y \mapsto y-(6-x)}$ est strictement croissante sur $\underline{\mathbf{R}}$;

   $\iff x+1 \geq 2\sqrt{2-x}$ en appliquant à _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ :
   $y \mapsto$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ est strictement croissante sur _ _ _ _ _ _ _ _ .

   Pour $x < -1$, la dernière inégalité est fausse.

   On suppose donc désormais $x \in [-1,\,2]$. Dans ce contexte, on obtient

   $x+1 \geq 2\sqrt{2-x}$

   $\iff x^2+2x+1 \geq 4(2-x)$ en appliquant _ :
   _ .

   $\iff x^2+6x-7 \geq 0$ en appliquant _ :
   _ .

   $\iff x \geq 1$ en appliquant à _ _ _ _ _ _ _ qui sont _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ :
   $\underline{y \mapsto y^2+6y-7}$ est _ .

   On a donc $\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x+8}-2 \geq \sqrt{2-x}\} = [1,\,2]$.

2. Indiquer les ressources qui justifient le calcul suivant, en précisant les arguments, et les inégalités qu'il faut vérifier:

   $$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \iff 1+\sqrt{1+\sqrt{2}} < \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \iff 4\sqrt{1+\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-1$$
   $$\iff 16(1+\sqrt{2}) < 9-4\sqrt{2} \iff 20\sqrt{2} < -7.$$

3. Pour m réel, comparer $3+\sqrt{13+3m}$ et $3+m+\sqrt{13}$ (seules les justifications donnent des points).

4. a) Complétez la réponse suivante:

Question: Pour x dans $[-3,2]$, majorer $\dfrac{x^3-\pi x}{5-x}$.

Réponse:

Pour x dans $[-3,2]$, on obtient:

(1) $x^3 \leq 8$ car $y \mapsto$ _ _ _ _ est croissante sur $\mathbf{R}$ (arguments _ _ _ _ et _ _ _ _);

(2) $-\pi x \leq 12$ car $y \mapsto -\pi y$ est _ _ _ _ _ _ _ _ _ sur $\mathbf{R}$ (arguments _ _ _ _ et _ _ _ _) et _ _ _ _ ≤ 12;

(3) $x^3-\pi x \leq 20$ en ajoutant (1) et _ _ _ _ ;

(4) $5-x \geq 3$ car $y \mapsto$ _ _ _ _ est décroissante sur $\mathbf{R}$ (arguments _ _ _ _ et _ _ _ _);

(5) $\dfrac{x^3-\pi x}{5-x} \leq \dfrac{20}{3}$ car on peut diviser (3) par (4) puisque _ _ _ _ et _ _ _ _ sont positifs;

b) Expliciter les ressources auxquelles on fait allusion quand on parle d'ajouter ou de diviser des inégalités.

5. Donner les justifications manquantes.

Question: Pour x dans $[-3,2]$, majorer $\dfrac{x^2+5}{x-3}$ par un nombre négatif.

Réponse: Pour x dans $[-3,2]$, on obtient successivement

$3-x \leq 6,\quad x^2+5 \geq 5,\quad \dfrac{x^2+5}{3-x} \geq \dfrac{5}{6},\quad$ et $\quad \dfrac{x^2+5}{x-3} \leq -\dfrac{5}{6}.$

6. Pour x dans $[-3, \ln\frac{\pi}{2}]$, majorer $\dfrac{x^2+\sin x+x}{\sin e^x}$ par un entier.

7. Démontrer l'énoncé de division des inégalités mentionné plus haut.

8.

Le coin des extra-terrestres

a) Comparer $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi^3}{648}$ et 1.

b) Calculer $\min(3^\pi, \pi^3)$.

c) Comparer $\sin^2(\pi(2+\sqrt{3})^{1000})$ et 10^{-1000}.

d) Pour x réel, comparer 2^x et x^2.

e) Ici, $x = 0,001$. Encadrer finement $\sin(\pi^{1+x})+\sin(\pi^{1-x})$.

f) Comparer $0,\ 9,\ 0,9,\ 0,\overline{9},\ 0,\overline{99},\ 0,99,$ et 1.