Maths Exos2: # Complexes 7/10/02 Deug MIASSM TC

1. Complétez la réponse suivante:

   Question: Calculer les parties réelle et imaginaire, le module et l'argument de $(1-i)^5$.

   Réponse: On obtient successivement:

   $|1-i| = \sqrt{2}$ en appliquant à $a := 1 \in \mathbf{R}$ et $b := -1 \in \mathbf{R}$ la formule $|a+ib| =$ ....

   $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ en appliquant à ....

   la formulede distributivité $a(b-c) = ab - ac$;

   $= \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$ en exploitant $\frac{1}{\sqrt{2}} =$ .... et $-\frac{1}{\sqrt{2}} =$ ....

   $= \sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$ (*) en exploitant $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ pour $\theta :=$ ....

   $(1-i)^5 = (\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}})^5$ en exploitant ......

   $= (\sqrt{2})^5 (e^{-\frac{i\pi}{4}})^5$ en appliquant .... la formule $(ab)^c = a^c b^c$.

   $= 4\sqrt{2}\, e^{-\frac{5i\pi}{4}}$ (**) en exploitant la formule $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour ....

   On obtient alors le module et l'argument:

   $|(1-i)^5| = 4\sqrt{2}$ et $\mathrm{Arg}\,(1-i)^5 = -\frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

   en appliquant à .... les formules $|\rho e^{i\theta}| = \rho$ et $\mathrm{Arg}(\rho e^{i\theta}) = \theta\,[2\pi]$.

   On obtient ensuite:

   $(1-i)^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{5\pi}{4}) + i\sin(-\frac{5\pi}{4})\right)$

   à partir de (**) en exploitant $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ pour $\theta := -\frac{5\pi}{4}$.

   $= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en exploitant $\cos(-\frac{5\pi}{4}) =$ .... et $\sin(-\frac{5\pi}{4}) =$ ....

   $= -4 + 4i$ (***) en appliquant à ....

   la formule de distributivité $a(b+c) = ab + ac$.

   On obtient enfin les parties réelles et imaginaires:

   $\mathrm{Re}((1-i)^5) = -4$ et $\mathrm{Im}((1-i)^5) = 4$ à partir de (***) en appliquant à

   .... les formules $\mathrm{Re}(a+bi) = a$ et $\mathrm{Im}(a+bi) = b$.

2. Voici un calcul de la partie imaginaire de $(2+i)^{-3}$. Pour chaque étape du calcul, indiquer la principale ressource utilisée en précisant les arguments.

   $$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{|2+i|^2} = \frac{2-i}{5}.$$

   $$(2+i)^{-3} = \left(\frac{2-i}{5}\right)^3 = \frac{(2-i)^3}{125} = \frac{8-12i-6+i}{125} = \frac{2-11i}{125}$$

3. Calculer les parties réelle et imaginaire, le module et l'argument de $(-1+i\sqrt{3})^{12}$ (seules les justifications donnent des points).

4. Citer la principale ressource, avec les arguments correspondants, permettant de justifier chacune des affirmations dans la réponse suivante:

   Question: Calculer les racines cubiques de $(1+i)$.

   Réponse:

   On sait que $1+i$ a trois racines cubiques distinctes dont on note ρ le module (commun) et $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ les arguments.

   On a $|1+i| = \sqrt{2}$ et donc $\rho = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$.

   On a ensuite $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et donc $\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Les arguments cherchés θ_k vérifient donc $3\theta_k = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et ce sont, pour $k = 0, 1, 2$, $\quad \theta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\ [2\pi]$.

5. Calculer et dessiner les racines quatrièmes de $8\sqrt{3} - 8i$ (seuls les justifications et le dessin donnent des points).

6. Compléter la réponse suivante, et citer les ressources utilisées en donnant les arguments:

   Question: Calculer l'ensemble E des points z du plan complexe vérifiant
   $\mathrm{Re}(iz + 2\overline{z}) \leq 1$ et $|(1-i)z + 3| > 2$.

   Réponse:

   Soit ..... un nombre complexe dont on note ..... et .... les parties réelles et imaginaires.

   On obtient successivement:

   $\mathrm{Re}(iz + 2\overline{z}) = \mathrm{Re}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $|(1-i)z + 3| > 2 \iff |\ldots\ldots||z + \ldots\ldots| > 2 \iff |z + \frac{3}{\ldots\ldots}| > \frac{2}{\ldots\ldots} \iff |z - \ldots\ldots\ldots| > \ldots\ldots\ldots$

   L'ensemble E est donc .... du demi-plan .... d'quation .... et du complmentaire du disque .... de centre .... et de rayon ....

7. Calculer et dessiner l'ensemble des nombres complexes z vérifiant
   $\mathrm{Im}(iz + 2\overline{z}) \geq 0$ ou $|(3+4i)z + 5| \leq 4$.

8.
Le coin des extra-terrestres

   (a) Calculer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$.

   (b) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{C}$ l'équation $(a+i)z^2 + z + a - i = 0$ a-t-elle deux racines conjuguées? deux racines imaginaires pures?

   (c) Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ (indication: résoudre $z^5 - 1 = 0$).

   (d) Résoudre $z^7 = \overline{z}$.

   (e) Combien y a-t-il de nombres complexes formant, dans le plan complexe, un triangle équilatéral avec $2+i$ et $1+2i$? Les calculer.

   (f) Trouver le minimum de $|z + \frac{1}{z}|$ quand z varie dans $\mathbf{C}^*$, et où il est atteint. Et si z ne varie que dans $\mathbf{R}$? Même chose pour $|z - \frac{1}{z}|$.

   (g) Trouver dans les livres comment on résout l'équation du troisième degré.