Extrait du contrôle de novembre 2000 : étude de la fonction $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

(a) Etudier (domaine de définition, variations, concavité, branches infinies, position par rapport aux asymptotes éventuelles) le graphe de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

• Domaine de définition de f

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -f(-x)$. La fonction f est une fonction impaire. On peut donc se limiter à l'étude de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ si on le désire. Pour connaître ensuite f sur $\mathbb{R}$ entier, il suffira de compléter par symétrie par rapport à l'origine.

• Variations de f

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Quel que soit le réel x, on a $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $(1 - x^2) = (1 - x)(1 + x)$.

On a donc : $f'(x) > 0$ pour $x \in]-1, 1[$,
$f'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 1$
$f'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Etudions maintenant les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
On sait (voir par exemple le formulaire du bac) que $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.
On va majorer f par la fonction xe^{-x} pour x suffisamment grand.
On a $\frac{x^2}{2} \geq x \iff \frac{x^2}{2} - x \geq 0 \iff x(\frac{x}{2} - 1) \geq 0$. Pour $x \geq 2$, on a $x \geq 0$ et $\frac{x}{2} - 1 \geq 0$ donc $x(\frac{x}{2} - 1) \geq 0$. Donc, pour $x \geq 2$, on a $-\frac{x^2}{2} \leq -x$ donc $e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^{-x}$ puisque $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc, pour $x \geq 2$, on a $0 \leq f(x) \leq xe^{-x}$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ puisque $f(x)$ est encadré pour ≥ 2 par deux fonctions qui tendent vers 0 en $+\infty$.
Puisque f est une fonction impaire, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Pour compléter le tableau de variations de f, on calcule les valeurs $f(0) = 0,\ f(1) = e^{-\frac{1}{2}} = -f(-1)$.
On a alors le tableau de variations suivant pour f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

• Concavité de f

La concavité d'une fonction deux fois dérivable est donnée par le signe de sa dérivée seconde.
$f''(x) = (-2x - x(1 - x^2))e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^3 - 3x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
Le signe de l'expression $x(x^2 - 3)$ est résumé dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$x - \sqrt{3}$		-		-		-	0	+	
$x + \sqrt{3}$		-	0	+		+		+	
$x(x^2 - 3)$		-	0	+	0	-	0	+	

On a donc : $f''(x) > 0$ pour $x \in]-\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$,
$f''(x) = 0$ pour $x = -\sqrt{3}$ ou $x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$
$f''(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, +\sqrt{3}[$.

On a donc : f est concave sur $]-\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$,
f est convexe sur $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, +\sqrt{3}[$.

De plus, f possède trois points d'inflexion, pour $x = -\sqrt{3}$ ou $x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$, puisque la dérivée seconde de f s'y annule en changeant de signe, ce qui correspond à un changement de concavité.

• Branches infinies de f et position par rapport aux asymptotes éventuelles

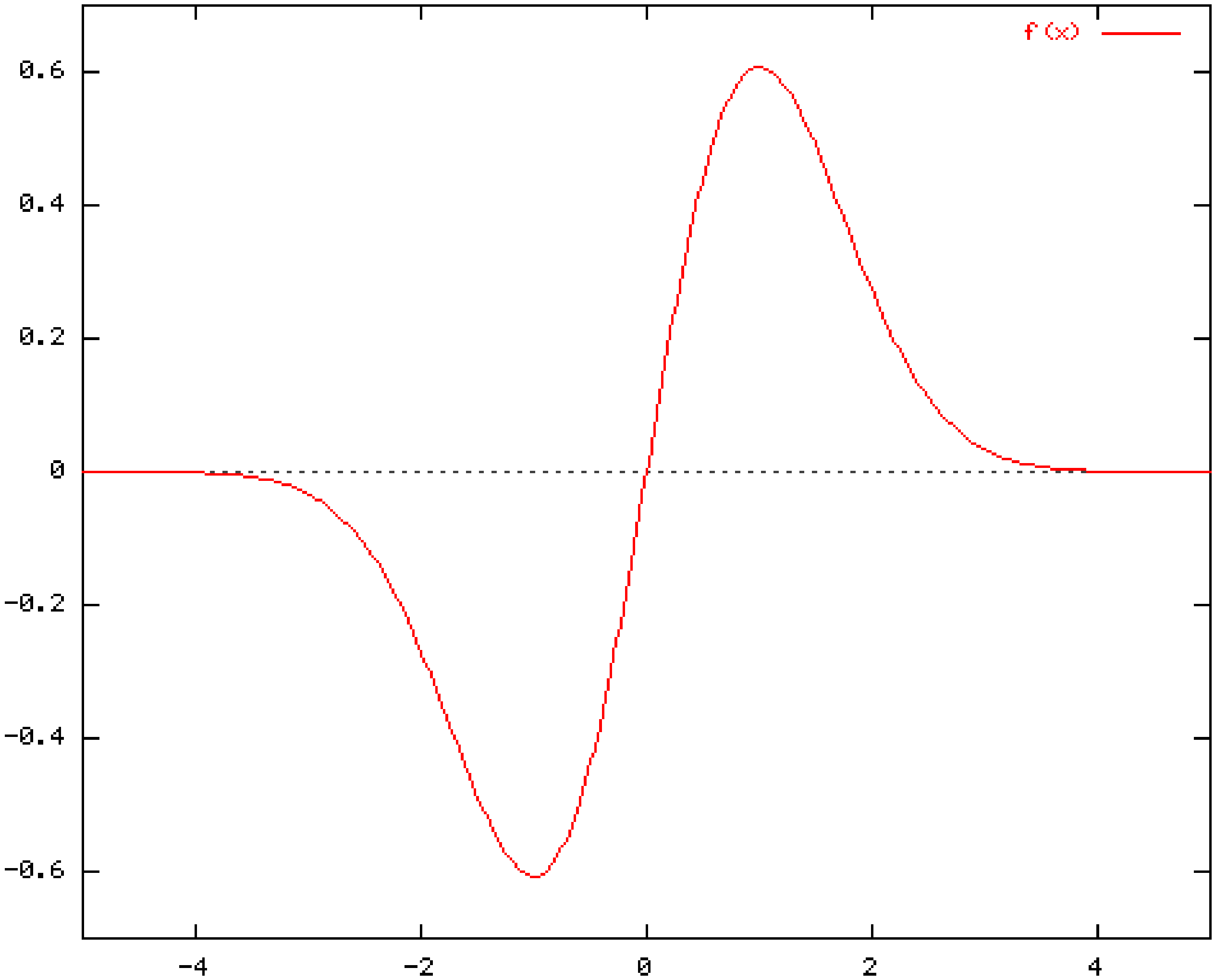
Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $\{y = 0\}$ est asymptote à f en $+\infty$ et $-\infty$.
Pour déterminer la position de f par rapport à son asymptote, il suffit de déterminer le signe de $f(x) - 0 = f(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.
On a, pour $x > 0$, $f(x) > 0$ donc le graphe de f se trouve au-dessus de son asymptote en $+\infty$ et par symétrie, en-dessous en $-\infty$.

(b) Préciser où est atteint son minimum et combien il vaut.

On voit sur le tableau de variations que f admet un minimum en $x = -1$ et qu'alors f vaut $f(-1) = -e^{\frac{1}{2}}$.

(c) Tracer le graphe. Présente-t-il une symétrie ?

On peut alors tracer le graphe de f, qui est symétrique par rapport au point de coordonnnées $(0, 0)$ puisque f est une fonction impaire.



(d) Montrer que, pour $x \geq 4$, on a $f(x) \leq \frac{1}{2^6}$.

On a vu dans **(a)** que f est décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que : $\forall x \geq 4,\ f(x) \leq f(4)$. Pour montrer l'inégalité de l'énoncé, il suffit de montrer $f(4) \leq \frac{1}{2^6}$. Or $f(4) = 4e^{-8} = 2^2 e^{-8}$.

Notons (1) l'inégalité $f(4) \leq \frac{1}{2^6}$.

On a la suite d'équivalences :

(1) $\iff 2^2 e^{-8} \leq 2^{-6}$
(1) $\iff e^{-8} \leq 2^{-8}$
(1) $\iff e^{-8} \leq e^{-8\ln 2}$
(1) $\iff -8 \leq -8\ln 2$ (puisque $x \mapsto e^x$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$)
(1) $\iff 1 \geq \ln 2$
(1) $\iff \ln e \geq \ln 2$
(1) $\iff e \geq 2$ (puisque $x \mapsto \ln x$ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$).

Cette dernière inégalité est bien vérifiée puisque l'on sait que $e \geq 2,7$.

Donc on a bien : $\forall x \geq 4,\ f(x) \leq \frac{1}{2^6}$.