Maths Exos3 **Etude de fonctions** 14/10/02 Deug MIASSM TC

1. ## Calculer un tableau de variations

   Dans la réponse suivante, donner pour chaque ligne, l'élément de justification qui vous paraît le plus important.

   Question: Calculer le maximum de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{x^2+8}$.

   Réponse:

   Calcul du signe de f': on a $f'(x) = \dfrac{x^2+8-2x(x-1)}{(x^2+8)^2}$ et donc
   $f'(x)$ est du signe de $-x^2+2x+8$,
   qui est positif entre ses racines -2 et 4, et négatif ailleurs.

   Le TV de f est donc le suivant:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

   On vérifie que $f(4)$ est égal à $\frac{3}{24}$
   et supérieur à la limite de f en $-\infty$, donc le maximum de f est $\frac{3}{24}$.

2. **Calculer** le maximum et le minimum de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-1}{x^2+8}$.

3. ## Le coin des extra-terrestres

   (a) Etudier (domaine de définition, variations, concavité, branches infinies, position par rapport aux asymptotes éventuelles) le graphe de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x^2/2}$. Calculer son minimum. Trouver les points d'inflexion. Montrer que, pour $x \geq 4$, on a $f(x) \leq \dfrac{1}{2^6}$.

   (b) Etudier (totalement) les fonctions $x^a e^{bx}$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\dfrac{ax^2+bx+e}{cx+d}$.

   (c) Discuter les branches infinies du graphe de la fonction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.

4. ## Etudier les branches infinies

Dans la réponse suivante, donner pour chaque ligne, l'élément de justification qui vous paraît le plus important, en corrigeant les fqutes de frappe éventuelles.

Question: Etudier une branche infinie de la fonction f définie par $f(x) = 1 + x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Réponse:

On étudie $f(x)$ quand x tend vers l'infini dans l'intervalle $[3, +\infty\,[$, sur lequel f est bien définie.

Calcul de $\lim f$: on a $f(x) \geq x$ et

on en déduit que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

Calcul de $\lim \dfrac{f(x)}{x}$: on a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x} + 1 + \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x}$. Et $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x} = \sqrt{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{x^2}}$.

On a $\lim \dfrac{5}{x} = \lim \dfrac{5}{x^2} = 0$; et donc

$\lim \left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right) = 1$; puis

$\lim \left(\sqrt{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{x^2}}\right) = 1$; et finalement

$\lim \dfrac{f(x)}{x} = 2$.

Calcul de $\lim\ (f(x) - 2x)$.

On a $f(x) - 2x = \sqrt{x^2 - 5x + 6} - (x - 1) = \dfrac{x^2 - 5x + 6 - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + (x - 1)} = \dfrac{-3x + 5}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + (x - 1)}$;

et donc $f(x) - 2x = \dfrac{-3 + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + (1 - \frac{1}{x})}$,

et $\lim\ (f(x) - 2x) = -\dfrac{3}{2}$.

Calcul du signe de $f(x) - 2x + \dfrac{3}{2}$. On a $f(x) - 2x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{-6 + \frac{10}{x} + 3(\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + (1 - \frac{1}{x})}{2\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + 2(1 + \frac{1}{x}))}$.

Donc $f(x) - 2x + \dfrac{3}{2}$ a le même signe que $g(x) := -6 + 2\frac{5}{x} + 3(\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + (1 - \frac{1}{x}))$.

On a $g(x) = 3\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} - (3 + \frac{1}{x})$ et donc

$g(x)$ a le même signe que $9(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}) - (3 + \frac{1}{x})^2$

ou encore que $\dfrac{5 - 25x}{x^2}$,

qui est négatif pour x suffisamment grand.

Conclusion: le graphe de f admet la droite d'équation $y = 2x - \dfrac{3}{2}$ pour asymptote inférieure.

5. **Etudier** la branche infinie (avec la position par rapport à l'asymptote éventuelle) du graphe de la fonction f définie sur $[0' + \infty[$ par $f(x) = \pi x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 5}$.