Maths Exos4 # Fonctions réciproques 21/10/02 Deug MIASSM TC

1. Calculer une fonction réciproque

a) Esquisser le graphe des fonctions dont il est question puis rectifier les erreurs éventuelles dans la réponse suivante. Enfin donner, pour chaque affirmation, le complément de justification qui vous paraît le plus important.

Question: Soit $f := x \longmapsto (x+1)\sqrt{x+1}+2$. Calculer le domaine de définition, l'image et la dérivée de f. Montrer que f admet une réciproque f^{-1}, calculer cette réciproque et sa dérivée.

Réponse:

Pour x réel quelconque, on a $f(x) \neq \perp \iff (x+1)\sqrt{x+1} \neq \perp \iff \sqrt{x+1} \neq \perp \iff x+1 > 0$. Le domaine de définition de f est donc l'intervalle $[-1,\, +\infty[$. Elle est strictement croissante sur cet intervalle en vertu des résultats concernant le sens de variation des sommes et produits. Comme elle est dérivable et que sa limite en $+\infty$ est $+\infty$, son image est l'intervalle $[2,\, +\infty[$. La dérivée de f sur $[-1,\, +\infty[$ est donnée par la formule $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$ qui est bien strictement positive à part en 0. Le théorème d'inversion assure que f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $[-1,\, +\infty[$ qui est strictement croissante. Pour calculer sa valeur en $y \geq 2$, on résout l'équation $f(x) = y$ à l'inconnue $x \in [-1,\, +\infty[$. On a

$(x+1)\sqrt{x+1}+2 = y \iff (x+1)\sqrt{x+1} = y-2 \iff (x+1) = (y-2)^{\frac{2}{3}} \iff x = (y-2)^{\frac{2}{3}} - 1$. La fonction réciproque est donc définie pour $y \geq 2$ par $f^{-1}(y) = (y-2)^{\frac{2}{3}} - 1$. Elle est donc dérivable sur $]2,\, +\infty[$, avec pour $y > 2$, $(f^{-1})'(y) = \frac{2}{3}(y-2)^{-\frac{1}{3}}$.

b) Soit $f :=\ x \longmapsto x+\sqrt{x+1}$. Calculer le domaine de définition, l'image et la dérivée de f. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} puis calculer cette réciproque et sa dérivée.

2. Calculer la dérivée d'une fonction réciproque

a) Esquisser le graphe des fonctions dont il est question puis rectifier les erreurs éventuelles dans la réponse suivante. Enfin donner, pour chaque affirmation, le complément de justification qui vous paraît le plus important.

Question: Quelles sont les domaines de définition des fonctions inverses de la fonction $f = x \mapsto x^3 - 3x + 1$? Quelles sont les valeurs et les dérivées de ces fonctions en $y = 1$?

Réponse:

Le tableau de variation de f fait apparaître trois intervalles maximaux de stricte monotonie qui sont $]-\infty,\, -2[$, $]-2,\, +2[$ et $]+2,\, +\infty[$, d'images respectives $]-\infty,\, 2[$, $]-2,\, +2[$ et $]-2,\, +\infty[$. La valeur 1 est prise respectivement en -3, 0 et 3, qui sont donc les valeurs prises en 1 par les trois fonctions réciproques. La dérivée de f en ces trois points vaut respectivement 2, -3 et 2, ce qui fait que la dérivée en 1 de ses fonctions réciproques vaut respectivement $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

b) Quelles sont les domaines de définition des fonctions inverses de la fonction $f := x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$? Dessiner les graphes de toutes ces fonctions. Quelles sont les valeurs et les dérivées de ces fonctions en $y = -1$?

3. Calculer un défaut de réciprocité

a) Esquisser le graphe des fonctions dont il est question puis rectifier les erreurs éventuelles dans la réponse suivante et donner, pour chaque affirmation, le complément de justification qui vous paraît le plus important.

Question: Calculer $\operatorname{Arcsin}(\sin \frac{25}{2})$.

Réponse: On a $4\pi \leq \frac{25}{2} \leq 5\pi$, donc $\sin(\frac{25}{2}) = \sin(\frac{25}{2}) - 4\pi$ avec $0 \leq \frac{25}{2} - 4\pi \leq \pi$. Donc $\operatorname{Arcsin}(\sin \frac{25}{2}) = \sin(\frac{25}{2}) - 4\pi$.

b) Calculer $\operatorname{Arcsin}(\sin 22/7)$, $\operatorname{Arccos}(\cos 22/7)$, $\operatorname{Arctan}(\tan 22/7)$ et $\operatorname{Arcsin}(\cos 22/7)$.

4. Petit rab

(a) Calculer $f^{-1}(1)$ et $(f^{-1})'(1)$ pour $f := x \mapsto x + \frac{1}{x^2+1}$.

(b) Calculer la réciproque de $x \mapsto e^{x^3+1}$.

5. E-T

(a) Pour quelles valeurs du réel m la fonction $x^3 + mx + 1$ admet-elle une fonction réciproque sur $\mathbf{R}$? Pour lesquelles de ces valeurs cette fonction réciproque est-elle dérivable? Calculer sa dérivée en 0 ou en 1. Expliquer votre choix.

(b) Pour quelles valeurs du réel m la fonction f définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par

$$f(x) = mx^3 + 3x + m$$

admet-elle une fonction réciproque? Pour lesquelles de ces valeurs cette fonction réciproque est-elle dérivable? Pour $1 < m < 2$, calculer, au choix, sa dérivée en 7 ou en $9m + 6$. Expliquer votre choix.

(c) Discuter le problème de la fonction réciproque pour $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.