Fonctions continues

1. Reconnaître une fonction continue

a) Compléter la réponse suivante.

Expliquer où et pourquoi la fonction $x \mapsto |\ln(x\sqrt{5} + \sqrt{x^2 - 5x + 6})|$ est continue:

Cette fonction est de la forme $f_0 \circ f_1 \circ (f_2 + f_3 \circ f_4)$ avec $f_0 =$ ...., $f_1 =$ ...., $f_2 =$ ...., $f_3 =$ ...., $f_4 =$ .... C'est donc une combinaison de fonctions usuelles continues et par conséquent elle est continue sur son domaine de définition, qui est la réunion de .... avec ....

b) Expliquer où et pourquoi les fonctions suivantes sont continues: $x \mapsto |x^3 - 6x^2| - |11x - 6|$ $x \mapsto \frac{|x-1|}{\sqrt{x}-2}$, $x \mapsto |x|^{\frac{1}{3}}$, $x \mapsto \frac{x}{|\ln\ x|}$, $x \mapsto \cos\sqrt{-x}$, $x \mapsto \operatorname{Arcsin}|x^2 - 1|$, $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{e^{-x}-x^2}}$, $x \mapsto \operatorname{Arccos}|2x^2 - 1|$.

2. Reconnaître une discontinuité

a) Compléter les réponses suivantes et citer les ressources utilisées pour conclure.

i) Montrer que la fonction f qui vaut 0 sur $]-\infty, 0[$ et 1 sur $[0, +\infty[$ est discontinue en 0.

La limite de $f(x)$ pour x tendant vers 0 par valeurs négatives vaut .... et par conséquent diffère de .... qui vaut 1. Il s'ensuit que f est discontinue (à gauche) en 0 .

ii) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon est discontinue en 0.

La limite de $f(x)$ pour x tendant vers 0 par valeurs positives vaut .... et par conséquent f est discontinue (à droite) en 0 .

iii) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ n'a pas de prolongement continu en 0.

On considère les suites $u := n \mapsto \dfrac{1}{2n\pi}$ et $v := n \mapsto \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ qui tendent toutes les deux vers .... La limite de $f(u_n)$ est .... tandis que celle de $f(v_n)$ est .... Il s'ensuit que f n'a pas de prolongement continu en 0.

b)

i) Montrer que la fonction $f := x \mapsto xE(x)$ est discontinue en 1.

ii) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \cos x \ln x$ si $x > 0$ et 0 sinon est discontinue.

iii) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^x \sin\dfrac{1}{x}$ n'a pas de prolongement continu en 0.