Maths Exos6 **Développements limités** 18/11/02 Deug MIASSM TC

1. Démontrer l'existence d'un développement limité

a) Compléter la réponse suivante, puis écrire les DL_2 des f_i qu'il faut utiliser pour calculer le DL_2 de f en 1.

Question

Expliquer pourquoi la fonction $f := x \mapsto |\ln(x\sqrt{5} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}) - 8|$ admet un DL_∞ en 1:

Réponse Cette fonction est de la forme $f_0 \circ f_1 \circ (f_2 + f_3 \circ f_4)$ avec $f_0 =$ ...., $f_1 =$ ...., $f_2 =$ ...., $f_3 =$ ...., $f_4 =$ ....

Les fonctions f_2 et f_4 sont des .... et donc admettent un DL_∞ en 1. La fonction f_3 admet un DL_∞ en $f_4(1)$ qui vaut .... et qui est donc bien .... La fonction f_1 admet un DL_∞ en .... qui vaut .... et qui est donc bien .... Enfin la fonction f_0 admet un DL_∞ en .... qui vaut .... et qui est donc bien .... Le théorème de combinaison des DL assure que f admet un DL_∞ en 1.

b) Expliquer où et pourquoi les fonctions suivantes admettent un DL_∞:

$x \mapsto |x^3 - 6x^2| - |11x - 6|$, $x \mapsto \frac{|x-1|}{\sqrt{x}-2}$, $x \mapsto |x|^{\frac{1}{3}}$, $x \mapsto \frac{x}{|\ln\ x|}$, $x \mapsto \cos\sqrt{-x}$, $x \mapsto \text{Arcsin}\,|x^2 - 1|$, $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{e^{-x} - x^2}}$, $x \mapsto \text{Arccos}\,|2x^2 - 1|$.

c) Ecrire les DL_2 utiles pour calculer les DL_2 suivants

en 0 à l'ordre 3 de la fonction $e^{\cos x}$; en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2 de la fonction $e^x \cos x$;

en 2 à l'ordre 2 de la fonction $(\ln(1+x)))^{\frac{1}{2}}$; en 1 à l'ordre 2 de la fonction $\dfrac{\ln x}{1 + x^2 + x^4}$

2. Calculer un développement limité

Calculer le développement limité:

en 0 à l'ordre 3 de la fonction $e^x \cos 2x - x^2$; en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2 de la fonction $e^x \cos x$;

en 2 à l'ordre 2 de la fonction $(\ln(1+x)))^{\frac{1}{2}}$; en 1 à l'ordre 2 de la fonction $\dfrac{\ln x}{1 + x^2 + x^4}$.

3. Calculer des limites et des signes

Soit f définie sur $]-\pi/2, \pi/2[-\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$.

Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $e^{\sqrt{1+\sin x}} - e$. Montrer que $f(x)$ admet une limite ℓ quand x tend vers 0. On pose $f(0) = \ell$; montrer que la fonction f ainsi étendue est dérivable en 0 et préciser la position du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.