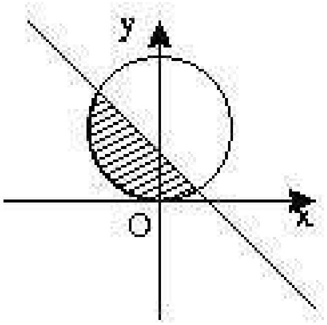
Corrigé du partiel de maths du 24/11/2001 Sujet A

Exo 1. Dessiner l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $\mathrm{Re}((1-i)z) < 2$ et $| iz+3 | \leq 3$ en précisant par les moyens de votre choix ce qui se passe "au bord".

On note $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}((1-i)z) < 2 \text{ et } | iz+3 | \leq 3\}$, $\mathcal{S}_1 = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}((1-i)z) < 2\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{z \in \mathbb{C};\ | iz+3 | \leq 3\}$. On a $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. On a donc $z = x + iy$.
Alors $| iz+3 | \leq 3 \iff | z - 3i | \leq 3$ et donc $\mathcal{S}_1$ est le disque fermé de centre $3i$ et de rayon 3,
D'autre part $\mathrm{Re}((1-i)z) < 2 \iff \mathrm{Re}((1-i)(x+iy)) < 2 \iff \mathrm{Re}(x - ix + iy + y) < 2 \iff x + y < 2$,



et donc $\mathcal{S}_2$ est le demi-plan ouvert sous la droite d'équation $x + y = 2$.

L'intersection $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ est la partie hachurée du dessin ci-contre. Au bord, les points du cercle sont dans $\mathcal{S}$ mais pas les points de la droite (ni les deux points d'intersection du cercle et de la droite).

Exo 2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{E}(x)$ (où $\mathrm{E}(x)$ est l'entier caractérisé par $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x)+1$) est discontinue.

Pour $0 \leq x < 1$, on a $\mathrm{E}(x) = 0$ donc $f(x) = 0$.
Pour $1 \leq x < 2$, on a $\mathrm{E}(x) = 1$ donc $f(x) = x$.
On peut tracer le graphe de la fonction f sur $[0, 2[$ et constater qu'elle semble discontinue en 1.
On a: f discontinue en 1 ssi $\exists u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u \to 1$ et $f(u) \not\to f(1)$.

Exhibons la suite réelle u définie par $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

On a bien $u \to 1$ et on constate que $f(u_n)$ est nul pour tout n, donc $f(u) \to 0 \neq f(1) = 1$.

Exo 3. Pour quelles valeurs du réel m la fonction f définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $f(x) = mx^3 + x + m$ admet-elle une fonction réciproque? Pour lesquelles de ces valeurs cette fonction réciproque est-elle dérivable? Pour $1 < m < 2$, calculer au choix, sa dérivée en 5 ou en $9m + 2$. Expliquer votre choix.

Pour que la fonction f, qui est dérivable, admette une réciproque sur $]1, +\infty[$, il faut et il suffit qu'elle soit strictement monotone. Etudions donc sur $]1, +\infty[$ le signe de $f'(x) = 3mx^2 + 1$. On distingue deux cas.

•<u>$1^{er} cas\ :\ m \geq 0.$</u> On a $\forall x \in \mathbb{R},\ 3mx^2 + 1 > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et donc admet une réciproque sur $]1, +\infty[$.

•<u>$2^{nd} cas\ :\ m < 0.$</u> Alors $f'(x) = 3mx^2 + 1$ est un polynôme du second degré en x qui admet deux racines réelles distinctes $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{-3m}}$ et $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{-3m}}$. On distingue alors deux sous-cas.

$\diamond$<u>$1^{er} sous-cas$</u> : $x_2 \leq 1$ autrement dit $m \leq -\dfrac{1}{3}$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-		-	
							$2m+1$		
$f(x)$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$\searrow$	
									$-\infty$

f est strictement décroissante, et admet donc une réciproque.

$\diamond$ $\underline{2^{nd} sous-cas}$: $x_2 > 1$ c'est-à-dire $m > -\dfrac{1}{3}$:

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$		$+$	0	-	
$f(x)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$2m+1$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

Alors f n'est même pas monotone, donc n'admet pas de réciproque.

On a donc montré que f admet une réciproque sur $]1,+\infty[$ si et seulement si $m \geq 0$ ou $m \leq -\frac{1}{3}$.

On sait que f^{-1} est dérivable à condition que l'on ait : $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) \neq 0$, ce qui est bien le cas quand $m \geq 0$ et quand $m \leq -\frac{1}{3}$.
Reste à calculer pour $1 < m < 2$, $(f^{-1})'(5)$ ou $(f^{-1})'(9m+2)$. Remarquons que si $1 < m < 2$, alors f admet bien une réciproque. Ensuite, il faut résoudre une des deux équations d'inconnue x : $f(x) = 5\,(*)$ ou $f(x) = 9m+2\,(**)$. L'équation $(**)$ a pour solution évidente $x = 2$. On calcule alors $f'(2) = 12m+1$ d'où $(f^{-1})'(9m+2) = \dfrac{1}{12m+1}$. Tandis qu'on ne sait pas résoudre $(*)$.

Exo 4. Etudier la branche infinie (avec la position par rapport à l'asymptote éventuelle) du graphe de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \pi - x - 2\sqrt{x^2+3x+5}$.

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Tout d'abord, on calcule $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
Comme x est positif, on a $\quad \dfrac{f(x)}{x} = -1 - 2\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} + \dfrac{\pi}{x} \quad$ d'où $\quad \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -3$.
Ensuite, on calcule $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-3x)) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)+3x) = \lim_{x\to+\infty}(\pi+2(x-\sqrt{x^2+3x+5}))$.
En faisant apparaître la quantité conjuguée, puis en simplifiant par x (qui est ici égal à $\sqrt{x^2}$), on obtient

$$x - \sqrt{x^2+3x+5} = \frac{x^2-(x^2+3x+5)}{x+\sqrt{x^2+3x+5}} = \frac{-3-\frac{5}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}.$$

On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3x+5}) = -\frac{3}{2}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+3x) = \pi + 2(-\frac{3}{2}) = \pi - 3.$$

Donc la droite d'équation $y = -3x+\pi-3$ est asymptote à f en $+\infty$.

Pour étudier la position par rapport à l'asymptote, il faut étudier, pour x grand, le signe de

$$f(x) - (-3x+\pi-3) = f(x)+3x-\pi+3 = 2x+3-2\sqrt{x^2+3x+5},$$

autrement dit il faut comparer les deux nombres positifs $2x+3$ et $2\sqrt{x^2+3x+5}$.
En élevant au carré, puis en simplifiant, on obtient:

$$2x+3 < 2\sqrt{x^2+3x+5} \iff (2x+3)^2 < 4(x^2+3x+5) \iff 9 < 20.$$

On en conclut $f(x)+3x-\pi+3 < 0$ en $+\infty$,
c'est-à-dire que la courbe représentative de f se trouve en-dessous de son asymptote.