MIAS-SM 1 TC maths 07/02/01 durée: 2h

1. (sur 2)

   Résoudre dans $\mathbf{R}$: $\sqrt{x+8}-2 \geq \sqrt{2-x}$.

2. (sur 1.5)

   Mettre le trinôme $z^2-(5+i)z+6-2i$ sous forme canonique puis résoudre dans $\mathbf{C}$: $z^2-(5+i)z+6-2i=0$.

3. (sur 1.5)

   Calculer $\text{Arccos}(\cos 9)$.

4. (sur 3)

   Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $\cos(e^x)$.

5. (sur 3)

   Trouver deux équations définissant la droite passant par $(m-2,1,2)$ et $(1,2,m+2)$.

6. (sur 3)

   Calculer la matrice, le noyau, l'image et s'il y a lieu l'inverse de l'application linéaire

   $$(x,y,z) \mapsto (x+2y-2z,\ 2x+3y+z,\ x+y+3z).$$

7. (sur 3) Calculer

   $$\int_0^{3/2} \frac{2-s}{\sqrt{9-s^2}}\,ds \qquad (\text{ on peut poser } s=3\ \sin t).$$

8. (sur 3)

   Compléter la preuve suivante:

   Théorème: Le développement limité du produit d'une fonction par un nombre est le produit par ce nombre du développement limité de la fonction.

   Preuve. Soit donc I un intervalle (non réduit à un point) de $\mathbf{R}$, a un point de I, et n un entier naturel. Soit λ un réel quelconque et f une fonction définie sur   et admettant pour développement limité à l'ordre n en a le polynôme P (qui est donc de degré au plus   ). Nos hypothèses signifient que le quotient $\epsilon'(x) := \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}$ tend vers zéro quand x tend vers   en restant dans   . Il nous faut montrer que la fonction λf admet pour développement limité à l'ordre n en a le polynôme λP. c'est-à-dire que le quotient $\epsilon(x) := \frac{\qquad\qquad}{(x-a)^n}$ tend vers zéro dans les mêmes conditions. Ceci résulte du théorème sur la limite   , car on vérifie facilement que $\epsilon(x)$ est   .