Calculer parties réelle et imaginaire, module et argument de $(-1+i\sqrt{3})^{12}$ et $(1+i)^{-20}$

Solution

• Pour $(-1+i\sqrt{3})^{12}$, on commence par écrire sous la forme module/argument le nombre complexe $-1+i\sqrt{3}$.

On a $\mid -1+i\sqrt{3} \mid = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$.

Donc $\arg(-1+i\sqrt{3})$ est l'angle α tel que $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Autrement dit, on a : $\arg(-1+i\sqrt{3}) = \dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

Ainsi, $-1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Donc $(-1+i\sqrt{3})^{12} = (2e^{\frac{2i\pi}{3}})^{12} = 2^{12}(e^{\frac{2i\pi}{3}})^{12} = 2^{12}(e^{\frac{24i\pi}{3}}) = 2^{12}(e^{8i\pi}) = 2^{12}$.

Donc $\mid (-1+i\sqrt{3})^{12} \mid = 2^{12}$, $\arg((-1+i\sqrt{3})^{12}) = 0\,[2\pi]$,

$\mathrm{Re}((-1+i\sqrt{3})^{12}) = 2^{12}$, $\mathrm{Im}((-1+i\sqrt{3})^{12}) = 0$.

• Pour $(1+i)^{-20}$, on procède de même et on commence par mettre sous la forme module/argument le nombre complexe $1+i$.

On a $\mid 1+i \mid = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$.

Donc $\arg(1+i)$ est l'angle β tel que $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Autrement dit, on a : $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Ainsi, $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

Donc $(1+i)^{-20} = (\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})^{-20} = 2^{-10}(e^{\frac{i\pi}{4}})^{-20} = 2^{-10}(e^{\frac{-20i\pi}{4}}) = 2^{-10}(e^{-5i\pi})$

$= 2^{-10}e^{i\pi} = -\dfrac{1}{2^{10}}$.

Donc $\mid (1+i)^{-20} \mid = 2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}}$, $\arg((1+i)^{-20}) = \pi\,[2\pi]$,

$\mathrm{Re}((1+i)^{-20}) = -\dfrac{1}{2^{10}}$, $\mathrm{Im}(\dfrac{1}{2^{10}}) = 0$.