Question: Donner une majoration grossière de $\dfrac{x-7}{x-5}$ pour $x \in [-3,2]$.

Réponse: Pour $x \in [-3,2]$, on a $x-7<0$ et $x-5<0$ (remarque : la fraction est bien définie puisque $x-5$ est non nul). On préfère travailler avec une fraction dont le dénominateur et le numérateur sont positifs, on écrit donc $\dfrac{x-7}{x-5} = \dfrac{7-x}{5-x}$. Pour majorer une fraction à numérateur et dénominateur positifs, on majore le numérateur et on minore le dénominateur. Pour $x \in [-3,2]$, on a $x \geq -3$, donc $-x \leq 3$ donc $7-x \leq 10$. D'autre part, pour $x \in [-3,2]$, on a $x \leq 2$ donc $-x \geq -2$ donc $5-x \geq 3$. On a donc, pour $x \in [-3,2]$,

$$\frac{x-7}{x-5} \leq \frac{10}{3} \leq 4\,.$$

Question: Encadrer finement de $\dfrac{x-7}{x-5}$ pour $x \in [-3,2]$.

Réponse: On étudie les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{x-7}{x-5}$ qui est bien définie sur $I = [-3,2] \subset]-\infty, 5[$. Elle est dérivable sur I avec $f'(x) = \dfrac{2}{(x-5)^2} > 0$ (sur I). Donc f est strictement croissante sur l'intervalle I. On en déduit pour tout x de $[-3,2]$, on a

$$f(-3) = \frac{5}{4} \leq \frac{x-7}{x-5} \leq f(2) = \frac{5}{3}.$$