Methodo Exos1: **Calculer** 30/09/02 Deug MIASSM TC

Calculer

1. L'ensemble $\mathbf{R}_\perp$ et les nouvelles fonctions

a) On pose $\mathbf{R}_\perp := \mathbf{R} \amalg \{\perp\}$ et on appelle bottom l'élément $\perp$. On note $\ln_\perp$ (dans cet exercice, et ln dans les suivants) l'application de $\mathbf{R}_\perp$ dans $\mathbf{R}_\perp$ qui vaut $\ln x$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $\perp$ ailleurs.
Faire un tableau pour visualiser. Donner les définitions et tableaux analogues pour les fonctions usuelles $\sin, \cos, \tan, \mathrm{cotan}, \exp, \sqrt{\ }$.

b) On note $+_\perp$ (dans cet exercice, et $+$ dans les suivants) l'application de $\mathbf{R}_\perp^2$ dans $\mathbf{R}_\perp$ qui vaut $x + y$ pour $x, y \neq \perp$ et $\perp$ ailleurs. Faire un tableau à double entrée pour visualiser.
Donner les définitions et tableaux analogues pour les autres opérations: $-, \times, /$.

c) Même question pour $(x, y) \mapsto x^y$.

d) A-t-on pour tout x dans $\mathbf{R}_\perp$: $\ln_\perp(1/_\perp x) == -_\perp \ln_\perp x$? Faire un tableau.
A-t-on pour tout x et tout y dans $\mathbf{R}_\perp$: $\ln_\perp(x \times_\perp y) = \ln_\perp x +_\perp \ln_\perp y$? Faire un tableau.

e) On dit que x est strictement mieux défini que y lorsque $y = \perp$ et $x \neq \perp$ (notation: $x \succ y$); et on dit que x est mieux défini que y si $x = y$ ou $x \succ y$ (notation: $x \succeq y$).
Proposer une ou deux autres formulations de cette définition.
A-t-on pour tout x et tout y dans $\mathbf{R}_\perp$: $\ln_\perp(x \times_\perp y) \succeq \ln_\perp x +_\perp \ln_\perp y$?

f) Faire le travail analogue pour $\sqrt{\ }$ et les ressources correspondantes concernant le produit et l'inverse.

g) Même question pour la formule $\mathrm{cotan}\, x = \dfrac{1}{\tan x}$.

2. Valider

a) On dit qu'un élément de $\mathbf{R}_\perp$ est mal défini (ou indéfini) s'il est égal à $\perp$ et bien défini sinon. Parmi les éléments suivants, lesquels sont-ils bien définis?

$$\frac{\cos\pi + \cos(-\pi)}{\cos\pi - \cos(-\pi)}, \quad \frac{1}{1 - \ln 1}, \quad \frac{1}{1 - \ln^4 e}, \quad \frac{1 - 2\sin\frac{\pi}{6}}{1 - e^0}, \quad \mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{2}\sin(-\pi), \quad (\cos^2\pi - 3\ln e + 2)^{-3}.$$

b) Ici x vaut 1 ou -1. Pour quelles valeurs de x l'expression suivante est-elle bien définie?

$$x^0, \quad (\ln x)^{\sin\pi}, \quad (\cos x\pi)^{-2x}, \quad (\cos\pi)^{\frac{x}{2}}, \quad (x\sqrt{3})^{\sqrt{3}}, \quad \ln(xe - \sqrt{8}).$$

c) On appelle domaine de définition de la fonction $f : \mathbf{R}_\perp \to \mathbf{R}_\perp$ l'ensemble des x de $\mathbf{R}_\perp$ où $f(x)$ est bien défini.

Calculer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2} - \ln(x+1)$.

Calculer le domaine de définition des fonctions suivantes, en indiquant les ressources utilisées:

$$x \mapsto (1 - \sqrt{x^2})^{-3}, \quad x \mapsto \ln(12x^4 - x^2).$$

3. Calculer

a) Calculer les expressions suivantes dans $\mathbf{R}_\perp$ en indiquant les ressources utilisées:

$$\binom{8}{4}, \quad \Sigma_{i=1}^{i=9} i, \quad 11!/9!, \quad 7+8+...+100, \quad 3+3^2+...+3^9, \quad (1+\sqrt{\ln\ln 2})^3,$$

$$(1+\sqrt{2})^3, \ (2+\sqrt{3})^{-2}, \ \ln(8!), \quad \ln\ln\ln(2!), \lim_{x\to+\infty} x^{\cos 3}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1,01^n}{n^{10000}}, \quad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n.$$

b) Pour x réel, arranger les expressions suivantes en indiquant les ressources utilisées:

$$(\sin x + \cos x)^2, \quad \cos(x+\frac{\pi}{6}), \quad (1+\sqrt{x})^3.$$

c) Ici x vaut $(1+\sqrt{2})^2$. Calculer de deux façons différentes $(1+2x)^2$.

4. Le coin des extra-terrestres

a) a) Est-ce que la (nouvelle) fonction tan est périodique?

b) Comparer deux choix possibles en matière de convention concernant la multiplication, avec leurs avantages et inconvénients.

c) Même question pour l'exponentiation.

d) Calculer $\sin\frac{\pi}{12}$. Calculer la racine positive de $x^2-3x=1$. Expliquer ce que veut dire calculer.

e) Ici x vaut $(1+\sqrt{2})^2$. Calculer de deux façons différentes $(1+2x)^2$.