Méthodo Exos6 **Raisonner** 25/11/02 Deug MIASSM TC

1. On considère la preuve suivante:

   Pour $x \leq -1$, on a $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Pour $x \leq -1$, on a $x^2 \geq 1$, donc $x^2+1 \geq 2$, d'où $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{2}$. Par conséquent, on a bien $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   a) Formaliser l'énoncé et expliciter l'objectif initial.

   b) Décrire l'objectif après les introductions naturelles.

   c) Expliquer les tactiques utilisées, avec les ressources et les arguments correspondants.

2. Dans chacun des textes suivants, formaliser l'énoncé, reconstituer les objectifs successifs, identifier les tactiques qui permettent de passer de l'un à l'autre, puis recenser les ressources utilisées et leurs arguments effectifs.

   (a) Pour tout couple (z, z') de nombres complexes, $|zz'| = |z||z'|$.
   Preuve (Guinin/Joppin). $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = (z\overline{z})(z'\overline{z'}) = |z|^2|z'|^2$.

   (b) Pour tout réel a strictement positif: $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.
   Preuve (Guinin/Joppin). La relation $(\sqrt{a})^2 = a$ et la propriété 6 donnent $2\ln\sqrt{a} = \ln a$, d'où la conclusion.

   (c) Pour tout réel a strictement positif: $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$.
   Preuve(d'après Guinin/Joppin). Il suffit de prouver $\ln\frac{1}{a} + \ln a = 0$, ou encore, d'après le théorème 1, $\ln(\frac{1}{a}.a) = 0$, ce qui résulte de $\ln 1 = 0$.

   (d) La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ est bornée.
   Preuve. Cette fonction est positive donc minorée. Pour montrer qu'elle est majorée par $\frac{1}{2}$, il nous suffit de montrer, pour x quelconque, $\sqrt{x^2+4} \geq 2$, ce qui résulte du fait que tout carré est positif.

   (e) Si deux fonctions ont même sens de variation sur $\mathbf{R}$, leur composée est croissante.
   Preuve. Soient par exemple f et g deux fonctions décroissantes sur $\mathbf{R}$, et x et y deux réels avec $x \leq y$. Comme f est décroissante, on déduit $f(x) \geq f(y)$, puis $g(f(x)) \leq g(f(y))$ puisque g est aussi décroissante, ce qui prouve que $g \circ f$ est croissante.

   (f) Pour a et b complexes, on a $a.b = 0 \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
   Preuve (Liret-Martinais). Si par exemple $a = 0$, alors nous savons déjà que $a.b = 0.b = 0$. Supposons $a.b = 0$ et $a \neq 0$. Il vient $b = 1.b = ((1/a).a).b = (1/a).(a.b) = (1/a).0 = 0$.

   (g) Si b est non nul, $|a| \leq |a+b|$ et $|a| \leq |a-b|$ implique $|a| \leq |b|/2$.
   Preuve (Silici). Par homogénéité, on peut diviser par b. Il faut donc démontrer
   $|a| \leq |a+1|$ et $|a| \leq |a-1| \Longrightarrow |a| \leq 1/2$.
   On observe que le signe de a est indifférent, supposons-le positif. La première inégalité est inutile mais la seconde donne le résultat.