# Traduire sous contexte

Dans le contexte donné, formaliser ou rédiger les énoncés suivants.

1. Contexte : $x$ et $y$ sont entiers.

   $x$ est multiple de 3; $\exists z \in \mathbf{N},\ 5z = x$; $x$ divise 34;
   $x$ est multiple de $y$; $\exists z \in \mathbf{N},\ x = 2^z$;
   $x$ est un cube; $x$ est somme de deux carrés;
   $\forall z \in \mathbf{N},\ (\exists p \in \mathbf{N},\ pz = x)$ et $(\exists q \in \mathbf{N}, qz = y) \Rightarrow z = 1$.

2. Contexte : $x$ et $y$ sont réels.

   $x$ est rationnel; $\exists n \in \mathbf{N},\ n = x$; $x$ est décimal;
   $x$ et $y$ ont même partie entière; $(x \geq 0$ et $y \leq 0)$ ou $(x \leq 0$ et $y \geq 0)$;
   $y$ est entre $x$ et $x^2$; $\forall p \in \mathbf{N},\ \forall q \in \mathbf{N}^*,\ x \neq p/q$.

3. Contexte : $z$ et $z'$ sont complexes.

   $z$ est imaginaire pur; $\exists n \in \mathbf{N},\ z^n = 1$;
   l'argument de $z$ est $\pi/12$; $z$ et $z'$ sont conjugués;
   $z$ est égal à $z'$ au signe près; $\exists t \in \mathbf{R}^*,\ tz = z'$.

4. Contexte : $P$ et $Q$ sont des parties de $\mathbf{R}$.

   $P$ est minorée; $\forall x \in \mathbf{R},\ x \in P \Leftrightarrow x \geq 0$;
   $P$ est un intervalle ouvert; $P$ est centré en 0;
   $\forall x \in P,\ x \geq 0$.

5. Contexte : $P$ et $Q$ sont des parties de $\mathbf{C}$.

   $P$ est la droite passant par 1 et $i$; $\forall z \in \mathbf{C},\ z \in P \Leftrightarrow |z| = 1$;
   $P$ est un cercle; $\exists a \in \mathbf{C},\ \exists r \in \mathbf{R}_+,\ z \in P \Rightarrow |z - a| = r$;
   $P$ est un demi-plan; $P$ est contenu dans $\mathbf{R}$;
   $\exists r \in \mathbf{C},\ \forall z \in P,\ |z| \leq r$.

6. Contexte : $I$ est un intervalle, $f$ et $g$ sont des fonctions sur $I$.

   $f$ est positive; $\exists m \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \geq m$;
   $f$ est constante; $\forall x \in I,\ f(x) \neq g(x)$;
   $f$ est croissante; $f$ est majorée par 2;
   $f$ est bornée; $\forall x,\ x' \in I,\ f(x) = 0$ et $f(x') = 0 \Rightarrow x = x'$;
   $f$ et $g$ sont distinctes; $f$ majore $g$;
   $f$ change de signe une et une seule fois sur $I$; $\forall x \in I,\ x + \pi \in I$ et $f(x + \pi) = f(x)$;
   $f$ est monotone; $(\forall x \in I,\ f(x) > g(x))$ ou $(\forall x \in I,\ f(x) < g(x)$;
   $\exists x \in I,\ \forall y \in I,\ y \geq x \Rightarrow f(y) \geq 0$.

# Traduire sans contexte

Formaliser ou rédiger les énoncés suivants.

1. Concernant les nombres entiers et rationnels:

   Tout entier est somme de deux carrés;
   Le produit de deux nombres rationnels est forcément rationnel;
   $\exists x \in \mathbf{N},\ \forall y \in \mathbf{N},\ y \geq x \Rightarrow \exists z \in \mathbf{N},\ y^3 \leq z^2 \leq (y+1)^3$;
   $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \exists a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{N}^*,\ n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

2. Concernant les nombres réels:

   Le produit de deux réels est nul si et seulement l'un des deux est nul;
   Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés;
   L'addition des nombres réels est commutative;
   $\forall x,\ y \in \mathbf{R},\ x \geq y$ ou $y \geq x$;
   $\forall x,\ y \in \mathbf{R},\ x \neq y \Rightarrow x > y$ ou $y < x$;
   $\forall x,\ y \in \mathbf{R},\ x^2 = y^2$ et $xy \geq 0 \Rightarrow x = y$.

3. Concernant les nombres complexes:

   L'opposé d'un nombre complexe imaginaire pur est son conjugué;
   Le produit des conjugués est le conjugué des produits;
   Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules et leurs arguments le sont;
   $\forall z \in \mathbf{C}^*,\ \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$;
   $\forall z \in \mathbf{C}^*,\ \exists r,\ r' \in \mathbf{C},\ r \neq r'$ et $r^2 = z$ et $r'^2 = z$;
   $\forall z \in \mathbf{C}^*,\ \forall \theta \in \mathbf{R},\ \operatorname{Arg} z = \theta \Rightarrow \operatorname{Arg} z^{-1} = -\theta$;
   $\forall z,\ z' \in \mathbf{C},\ z^2 = z'^2 \Rightarrow z = z'$ ou $z = -z'$;
   Il y a exactement $n$ racines $n$-ièmes de l'unité distinctes, et ce pour tout $n$.

4. Petit rab:

   Tout polynôme de coefficient dominant positif tend vers l'infini à l'infini;
   Un trinôme du second degré qui s'annule en trois points est identiquement nul;
   Un système de deux équations linéaires à deux inconnues de discriminant non-nul admet une unique solution;
   Deux équations linéaires à deux inconnues peuvent n'avoir aucune solution commune.