MIAS-SM TC UMED 31/01/02

Calculettes et documents interdits. Durée: 2h. Barème: $8 \times 3 = 24 > 20 =$ note_max.

1. On définit un connecteur logique $nimp : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ par $nimp(A, B) = non(A \Longrightarrow B)$. Etendre de façon pertinente ce connecteur à $\mathcal{B}_\perp = \mathcal{B} \amalg \{\perp\}$.

2. Sachant que P est une partie de $\mathbf{R}$, donnez une définition formelle pour la phrase suivante: P est un intervalle.

3. Sachant que f est une fonction sur l'intervalle I, formalisez la phrase suivante: f est strictement croissante.

4. L'une des formules de la feuille du bac est: $\overline{z} = x - iy$.

   a) Quelles y sont les variables libres et leurs types?

   b) Indiquez les ressources mises en oeuvre avec leur type.

   c) Quel est le contexte sous-entendu?

   d) Donner une version quantifiée et une version rédigée de cette formule.

5. Quelle ressource appliquez-vous à quels arguments pour passer du but A au but B?

   A: Contexte: $x \in \mathbf{R}$; énoncé: $\sqrt{4} \leq \sqrt{x^2+4}$

   B: Contexte: $x \in \mathbf{R}$; énoncé: $0 \leq 4 \leq x^2 + 4$.

6. Démontrer (en termes de tactiques) l'énoncé suivant, où f est définie par $f(x) = x^2 - x^6$:

   $$(\forall x \in \mathbf{R}, \exists m \in \mathbf{R}, f(x) \geq m) \,\text{et}\, \forall x \in \mathbf{R}, \exists T \in \mathbf{R}^*, f(x+T) = f(x).$$

   Est-ce que f est minorée? périodique?

7. La formule $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ aurait pu être sur la feuille du bac.

   a)Indiquez toutes les ressources mises en oeuvre avec leur type.

   b) Quel est le contexte sous-entendu?

   c) Donner une version quantifiée et une version rédigée de cette formule.

   d) On considère $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \amalg \{-\infty, +\infty\}$ et $\overline{\mathbf{R}}_+ := [0, +\infty[\amalg \{+\infty\}$. Proposez une extension de ln ($\hat{\ln} : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \overline{\mathbf{R}}$), ainsi que des autres ressources du a), qui étende au mieux le domaine de validité de la formule.

8. On considère le texte suivant:

   Si a est positif, sur $[-2a, +\infty[$ le graphe de $x \mapsto x^3$ est au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse a.

   Preuve. L'équation de cette tangente est $y = a^3 + 3a^2(x-a)$ et on doit donc montrer que pour $x \geq -2a$, on a $x^3 \geq a^3 + 3a^2(x-a)$. ...

   L'analyse de ce texte fait apparaître les deux buts suivants:

   A: Contexte: $a \in \mathbf{R}, a \geq 0$; énoncé: $\forall x \in \mathbf{R}, x \geq -2a \Longrightarrow x^3 \geq a^3 + 3a^2(x-a)$

   B: Contexte: $a, x \in \mathbf{R}, a \geq 0$; but: $x \geq -2a \Longrightarrow x^3 \geq a^3 + 3a^2(x-a)$

   a) Quelle tactique fait passer de A à B?

   b) Quelle tactique proposez-vous pour passer de B à un autre but?

   c) Citez deux ressources que vous pourriez utiliser pour terminer cette preuve. Pour chacune, indiquer les arguments auxquels vous l'appliqueriez.