MIAS-SM TC UMED 31/01/02

Calculettes et documents interdits. Durée: 2h. Barème: $8 \times 3 = 24 > 20 = \text{note\_max}$.

1. On définit un connecteur logique *recimp* : $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ par $recimp(A, B) = B \Longrightarrow A$. Etendre de façon pertinente ce connecteur à $\mathcal{B}_\perp = \mathcal{B} \amalg \{\perp\}$.

2. Sachant que P est une partie de $\mathbf{R}$, donnez une définition formelle pour la phrase suivante: P est un intervalle.

3. Sachant que f est une fonction sur l'intervalle I, formalisez la phrase suivante: f est constante.

4. L'une des formules de la feuille du bac est: $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$.

   a) Quelles y sont les variables libres et leurs types?

   b) Indiquez les ressources mises en oeuvre avec leur type.

   c) Quel est le contexte sous-entendu?

   d) Donner une version quantifiée et une version rédigée de cette formule.

5. Quelle ressource appliquez-vous à quels arguments pour réduire le but A au but B?

   A: Contexte: $x \in \mathbf{R}$; énoncé: $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{x^2+4}$

   B: Contexte: $x \in \mathbf{R}$; énoncé: $0 < 4 \leq x^2 + 4$.

6. Démontrer (en termes de tactiques) l'énoncé suivant, où f est définie par $f(x) = x^4 - x^2$:

$$(\forall x \in \mathbf{R}, \exists M \in \mathbf{R}, f(x) \leq M) \,\text{et}\, \forall x \in \mathbf{R}, \exists T \in \mathbf{R}^*, f(x+T) = f(x).$$

   Est-ce que f est majorée? périodique?

7. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, et on pose $\hat{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \amalg \{\infty\}$.

   a) Proposez une extension $\tilde{f}$ de f à $\hat{\mathbf{R}}$. Expliquez votre choix.

   b) Proposez une extension $\tilde{\tan}$ définie sur $\mathbf{R}$ de la fonction tangente à valeurs dans dans $\hat{\mathbf{R}}$.

   c) On rappelle la formule $\tan 2x = f(\tan x)$. Indiquez son domaine de validité.

   d) Avec vos choix de a) et b), dans quelle mesure la formule précédente s'étend-elle?

8. On considère le texte suivant:

   La fonction $x \mapsto \frac{2+\sin x}{\sqrt{x^2+4}}$ est majorée.

   Preuve. En majorant le numérateur par 3 et en minorant le dénominateur par 2, on voit que la fonction est majorée par $\frac{3}{2}$.

   Dans l'analyse de ce texte, on peut faire apparaître les deux buts suivants:

   C: Contexte: $x \in \mathbf{R}$; énoncé: $\frac{2+\sin x}{\sqrt{x^2+4}} \leq \frac{3}{2}$

   D: Contexte: $x \in \mathbf{R}$; énoncé: $0 < 4 \leq x^2 + 4$.

   a) Expliquez l'enchaînement de deux tactiques qui a généré le but C.

   b) Proposer un enchaînement de tactiques pour passer de C à D. Indiquez le(s) but(s) intermédiaire(s).

   c) Quelle tactique proposez-vous pour passer de D au but suivant?

   d) Citez une ressource que vous pourriez utiliser pour terminer cette preuve.