

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE PRICING D'OPTIONS

DIDIER AUROUX

POLYTECH'NICE-SOPHIA
MAM5 - OPTION IMAFA
2010-2011

TABLE DES MATIÈRES

1. Notations et équation de Black-Scholes	2
1.1. Notations	2
1.2. Équation de Black-Scholes	2
1.3. Conditions aux limites pour un call	2
1.4. Conditions aux limites pour un put	3
1.5. Lien entre l'équation de Black-Scholes et l'équation de la chaleur	3
1.6. Solution analytique	4
2. Schémas numériques pour la résolution de l'équation de la chaleur	4
2.1. Discrétisation et différences finies	5
2.2. Schéma d'Euler explicite	6
2.3. Schéma d'Euler implicite	7
2.4. Schéma de Crank-Nicholson	9
3. Résolution numérique de l'équation de Black-Scholes	10

1. NOTATIONS ET ÉQUATION DE BLACK-SCHOLES

1.1. **Notations.** On note V la valeur d'une option (on se limitera aux options européennes dans ce cours). On pourra faire la distinction entre un "call" C et un "put" P si besoin. Ce sont des fonctions du temps t , et de la valeur actuelle de l'action sous-jacente S . On note donc $V = V(S, t)$.

On notera également :

- σ la volatilité du prix de l'action ;
- E le prix d'exercice fixé par l'option ;
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance ;
- r le taux d'intérêt.

1.2. **Équation de Black-Scholes.** C'est une équation aux dérivées partielles qui permet de calculer la valeur d'une option européenne en fonction du temps et de la valeur de l'action sous-jacente. Le modèle est le suivant :

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

C'est une équation aux dérivées partielles (EDP) d'ordre 2, du type parabolique, et il est nécessaire de préciser une condition initiale (ou finale) en temps, et des conditions aux limites en espace.

1.3. **Conditions aux limites pour un call.** Dans le cas d'un "call" (option d'achat) pour une option européenne, on a une condition finale, à l'instant $t = T$ correspondant à l'échéance de l'option : à $t = T$, la valeur du call est donnée par la formule

$$(2) \quad C(S, T) = \max(S - E, 0), \quad \forall S.$$

En effet, si S est inférieur au prix d'exercice au terme de l'option, il est inintéressant d'exercer l'option (sous peine de perdre $E - S$). Dans le cas contraire, le bénéfice du call est $S - E$.

Le domaine d'étude en "espace" (variable S) est théoriquement $[0, +\infty[$, et il faut donc fixer les conditions aux limites sur la fonction C . Si $S = 0$, alors le bénéfice à terme est forcément nul. Il n'y a donc aucun intérêt à exercer l'option d'achat dans ce cas, même s'il reste du temps avant son expiration. On a donc la condition suivante :

$$(3) \quad C(0, t) = 0, \quad \forall t.$$

Si au contraire le prix de l'action augmente considérablement ($S \rightarrow +\infty$), il est clair que l'option sera exercée et que le prix d'exercice de l'option sera négligeable. On a donc la condition suivante :

$$(4) \quad C(S, t) \sim S, \quad S \rightarrow +\infty.$$

L'ensemble des équations (1)-(4) peut être résolu afin de déterminer la valeur d'un option d'achat (call).

1.4. **Conditions aux limites pour un put.** Dans le cas d'une option du type "put" (option de vente), la condition finale est le bénéfice :

$$(5) \quad P(S, T) = \max(E - S, 0), \quad \forall S.$$

En effet, si S est supérieur au prix d'exercice au terme de l'option, il est inintéressant d'exercer l'option (sous peine de perdre $S - E$). Dans le cas contraire, le bénéfice du put est $E - S$.

Le domaine d'étude en "espace" (variable S) est toujours $[0, +\infty[$, et il faut donc fixer les conditions aux limites sur la fonction P . Si le prix de l'action augmente considérablement ($S \rightarrow +\infty$), il est clair que l'option de vente ne sera pas exercée, et donc on a la condition suivante :

$$(6) \quad P(S, t) \rightarrow 0, \quad S \rightarrow +\infty.$$

Si au contraire, on considère le cas d'une action dont le prix est nul ($S = 0$), alors le bénéfice à terme est forcément E . Il faut tenir compte du taux d'intérêt r pour en déduire la valeur de $P(0, t)$ sachant qu'à l'instant T , $P(0, T) = E$. Dans le cas d'un taux d'intérêt constant, on trouve assez facilement la condition suivante en résolvant l'équation (1) dans le cas $S = 0$:

$$(7) \quad P(0, t) = E e^{-r(T-t)}, \quad \forall t.$$

On peut généraliser cette formule dans le cas de taux non constants :

$$P(0, t) = E e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau}, \quad \forall t.$$

L'ensemble des équations (1) et (5)-(7) peut être résolu afin de déterminer la valeur d'une option de vente (put).

1.5. Lien entre l'équation de Black-Scholes et l'équation de la chaleur.

Prenons le cas d'une option d'achat (call), nous allons nous ramener de l'équation de Black-Scholes à l'équation de la chaleur. On considère donc l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$C(0, t) = 0; \quad C(S, t) \sim S, \quad S \rightarrow +\infty$$

et la condition finale

$$C(S, T) = \max(S - E, 0).$$

Dans un premier temps, on effectue un changement de variable pour supprimer les termes en S et S^2 devant les opérateurs différentiels, revenir en temps croissant (avec une condition initiale) : $S = Ee^x$, $t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ et $C = Ev(x, \tau)$.

On obtient alors l'équation suivante :

$$(9) \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv,$$

avec $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$. La condition initiale devient

$$(10) \quad v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0),$$

et l'intervalle de temps considéré est maintenant $[0, \frac{1}{2}\sigma^2 T]$.

En se basant sur l'équation caractéristique $\alpha^2 + (k-1)\alpha - k$ correspondant à l'équation (9), on fait un changement de variable pour supprimer les opérateurs différentiels d'ordre 1 et 0. On pose α tel que $0 = 2\alpha + (k-1)$ et $\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k$, et $v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$, ce qui donne u solution de l'équation de la chaleur suivante :

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

pour $\tau > 0$ (et en fait $\tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T$, délai d'expiration de l'option), et $x \in \mathbb{R}$. Enfin, la condition initiale est

$$u(x, 0) = u_0(x) = \max \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0 \right).$$

On voit donc que l'équation de Black-Scholes se ramène à l'équation de la chaleur, qui est plus facile à résoudre (numériquement ou analytiquement). À partir de la solution de l'équation de la chaleur, on remonte à l'équation de Black-Scholes en faisant les changements de variable à l'envers.

1.6. Solution analytique. La solution de l'équation (11) est donnée par

$$(12) \quad u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds.$$

Après remplacement de u_0 par son expression, calcul, et changements de variables inverses, on obtient :

$$(13) \quad C(S, t) = S N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

avec

$$(14) \quad d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$(15) \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$(16) \quad N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds.$$

De même, la valeur d'une option de vente (put) est

$$(17) \quad P(S, t) = E e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S N(-d_1)$$

2. SCHEMAS NUMERIQUES POUR LA RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR

Nous nous intéressons maintenant à la résolution numérique de l'équation de la chaleur. Cette équation est en effet plus simple que l'équation de Black-Scholes, et nous avons vu qu'il était possible de se ramener de l'une à l'autre par des changements de variable. On rappelle l'équation de la chaleur considérée ici :

$$(18) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2.1. Discrétisation et différences finies. La résolution numérique d'une EDP nécessite la discrétisation du domaine d'étude considéré, en temps comme en espace. On suppose que l'intervalle de temps est découpé suivant une grille avec un nombre fini de points et d'intervalles. On va calculer (et considérer) la solution uniquement en ces instants-là. La difficulté consiste alors à calculer les dérivées (ici, en temps) à partir de ces valeurs discrètes. Si on note $\delta\tau$ l'intervalle de temps (supposé constant) de la grille de discrétisation temporelle, et δx le pas d'espace (supposé aussi constant) de la grille de discrétisation spatiale, on ne calculera la solution qu'aux points $x = n \delta x$ et $\tau = m \delta\tau$.

Comme vu précédemment, l'intervalle de temps considéré est $[0; \frac{1}{2}\sigma^2 T]$ (date d'expiration de l'option). On découpe généralement cet intervalle en M intervalles constants, et donc $\delta\tau = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 T}{M}$.

De même, le domaine d'espace que l'on considère est \mathbb{R} . Il est évident qu'on ne peut pas discrétiser toute la droite réelle, et on se limite donc à un intervalle d'espace borné $[N^- \delta x; N^+ \delta x]$, où $N^- < 0$ et $N^+ > 0$ sont deux entiers.

Dans la suite, on notera

$$(19) \quad u_n^m = u(n \delta x, m \delta\tau)$$

la valeur de la solution u au point de grille $(n \delta x, m \delta\tau)$. L'indice temporel est en haut, et l'indice spatial en bas.

Si on se place à un instant τ donné, et si on suppose qu'on connaît la solution $u(x, \tau)$, on souhaite calculer la dérivée temporelle $\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau)$. Supposons que la solution soit connue aux instants $\tau - \delta\tau$ et $\tau + \delta\tau$. Il existe alors plusieurs schémas aux différences finies pour approcher la valeur de la dérivée temporelle. On remarquera que les mêmes schémas peuvent être utilisés pour les dérivées spatiales.

2.1.1. Différences finies décentrées à droite. Une première approximation de la dérivée partielle de u est donnée par la formule des différences finies décentrées à droite :

$$(20) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) \simeq \frac{u(x, \tau + \delta\tau) - u(x, \tau)}{\delta\tau}.$$

L'erreur d'approximation est d'ordre 1, en $\mathcal{O}(\delta\tau)$. La justification de cette approximation est immédiate en utilisant une formule de Taylor.

2.1.2. Différences finies décentrées à gauche. Une deuxième approximation de la dérivée partielle de u est donnée par la formule des différences finies décentrées à gauche :

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) \simeq \frac{u(x, \tau) - u(x, \tau - \delta\tau)}{\delta\tau}.$$

L'erreur d'approximation est également d'ordre 1, en $\mathcal{O}(\delta\tau)$.

Dans les deux cas, on utilise la valeur au point courant (τ), et la valeur en un point voisin (à droite ou à gauche).

2.1.3. Différences finies centrées. Une bien meilleure approximation de la dérivée partielle de u est donnée par la formule des différences finies centrées, en utilisant à la fois le point voisin à gauche et le point voisin à droite :

$$(22) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) \simeq \frac{u(x, \tau + \delta\tau) - u(x, \tau - \delta\tau)}{2 \delta\tau}.$$

L'erreur d'approximation est désormais d'ordre 2, en $\mathcal{O}(\delta\tau^2)$ (cf formule de Taylor). Cette formule est beaucoup plus précise, puisque l'erreur est en $\delta\tau^2$ au lieu d'être en $\delta\tau$. Il n'est donc pas nécessaire de raffiner énormément la grille de discrétisation en temps (et diminuer $\delta\tau$) pour obtenir des résultats très précis. Par contre, cela complique légèrement la mise en œuvre informatique, puisque c'est un schéma à trois points ($\tau - \delta\tau$, τ et $\tau + \delta\tau$) et non deux (comme les schémas décentrés précédents).

2.1.4. *Différences finies centrées pour la dérivée seconde.* En utilisant les mêmes formules, on peut approcher la dérivée seconde en espace dans l'équation (18) avec la formule suivante :

$$(23) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) \simeq \frac{u(x - \delta x, \tau) - 2u(x, \tau) + u(x + \delta x, \tau)}{\delta x^2}.$$

L'erreur d'approximation de cette formule est d'ordre 2 (en espace), en $\mathcal{O}(\delta x^2)$.

2.2. **Schéma d'Euler explicite.** Le schéma d'Euler explicite consiste à utiliser un schéma aux différences finies, décentré à droite, pour le calcul de la dérivée temporelle :

$$(24) \quad \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta\tau} \simeq \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{\delta x^2}.$$

Ainsi, si la solution est connue à l'instant $m\delta\tau$ en tous les points d'espace (et plus particulièrement en $(n-1)\delta x$, $n\delta x$ et $(n+1)\delta x$), alors on peut calculer "explicitement" la solution à l'instant suivant $(m+1)\delta\tau$, au point $n\delta x$. On peut donc calculer la solution à l'instant $\tau + \delta\tau$ explicitement en fonction de la solution à l'instant τ .

2.2.1. *Initialisation et conditions aux limites.* L'initialisation du schéma se fait à l'instant initial :

$$u_n^0 = u_0(n\delta x), \quad N^- \leq n \leq N^+.$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, en chaque pas de temps, on utilisera les conditions aux limites en $+\infty$ et $-\infty$:

$$u_{N^-}^m = u_{-\infty}(N^- \delta x, m\delta\tau), \quad u_{N^+}^m = u_{+\infty}(N^+ \delta x, m\delta\tau), \quad \forall 0 < m \leq M.$$

2.2.2. *Stabilité.* En notant

$$(25) \quad \alpha = \frac{\delta\tau}{\delta x^2},$$

on peut réécrire l'équation (24) sous la forme

$$(26) \quad u_n^{m+1} = \alpha u_{n-1}^m + (1 - 2\alpha) u_n^m + \alpha u_{n+1}^m.$$

Pour des raisons de stabilité, il est impératif que

$$(27) \quad \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

En effet, si c'est le cas, alors tous les poids dans l'équation (26) sont positifs, et si on note U^m le maximum de tous les u_n^m pour tous les n , et on voit facilement que

$$u_n^{m+1} \leq (\alpha + (1 - 2\alpha) + \alpha) U^m = U^m$$

et donc la solution à l'instant $\tau + \delta\tau$ n'est pas plus grande que celle à l'instant τ , ce qui empêche toute divergence ou explosion numérique de la solution.

Si la condition de stabilité n'est pas vérifiée, alors on peut faire le même calcul mais en prenant la valeur absolue des poids :

$$u_n^{m+1} \leq (\alpha + |1 - 2\alpha| + \alpha)U^m = (\alpha + (2\alpha - 1) + \alpha)U^m \leq U^m$$

si et seulement si $4\alpha - 1 \leq 1$, ce qui est équivalent à $\alpha \leq \frac{1}{2}$. La condition (27) est donc une condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma numérique.

L'erreur d'approximation du schéma numérique est en $\mathcal{O}(\delta\tau + \delta x^2)$, comme vu précédemment. Le schéma étant stable du moment que $\delta\tau \leq \frac{1}{2}\delta x^2$, il est inutile de raffiner excessivement, et on prendra $\delta\tau$ du même ordre que δx^2 (par exemple $0,4\delta x^2$). L'erreur est donc en $\mathcal{O}(\delta x^2)$. On choisit donc δx en fonction de la précision souhaitée, et du temps de calcul dont on dispose, puis on fixe $\delta\tau$ de l'ordre de δx^2 .

2.3. Schéma d'Euler implicite. Le schéma d'Euler implicite consiste à utiliser un schéma aux différences finies, décentré à gauche, pour le calcul de la dérivée temporelle :

$$(28) \quad \frac{u_n^m - u_n^{m-1}}{\delta\tau} \simeq \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{\delta x^2}.$$

De façon équivalente, en augmentant m de 1, on obtient

$$(29) \quad \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta\tau} \simeq \frac{u_{n-1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}}{\delta x^2}.$$

À la différence du schéma d'Euler explicite, le calcul de la solution à l'instant $(m+1)\delta\tau$ est implicite en la solution à l'instant $m\delta\tau$, puisque la partie droite de l'équation est également inconnue. On ne peut donc pas calculer explicitement et séparément u_n^{m+1} , u_{n-1}^{m+1} ou u_{n+1}^{m+1} en fonction de u_n^m . On doit donc résoudre cette équation d'une manière globale, afin de calculer en même temps tous les u_n^{m+1} , pour tout n .

Comme dans le cas précédent, l'erreur d'approximation du schéma est en $\mathcal{O}(\delta\tau + \delta x^2)$.

L'utilisation des conditions aux limites et l'initialisation du schéma se font de la même façon que pour le schéma d'Euler explicite.

2.3.1. Réécriture matricielle. Comme précédemment, on note $\alpha = \frac{\delta\tau}{\delta x^2}$. On peut donc réécrire (29) sous la forme

$$-\alpha u_{n-1}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_n^{m+1} - \alpha u_{n+1}^{m+1} = u_n^m.$$

On se fixe un m , on suppose que tous les u_n^m sont connus, et on souhaite calculer tous les u_n^{m+1} . On rappelle que u_{N-1}^{m+1} et u_{N+1}^{m+1} sont connus grâce aux conditions aux limites. On peut alors réécrire (29) de la manière suivante :

$$(30) \quad \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha & -\alpha & & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & & -\alpha & 1 + 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{N-1}^{m+1} \\ \vdots \\ u_0^{m+1} \\ \vdots \\ u_{N+1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{N-1}^m \\ \vdots \\ u_0^m \\ \vdots \\ u_{N+1}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha u_{N-1}^{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha u_{N+1}^{m+1} \end{pmatrix}.$$

On voit apparaître la matrice tridiagonale, avec des $1 + 2\alpha$ sur la diagonale, et des $-\alpha$ sur et sous la diagonale, puis le vecteur d'inconnues constitué des u_n^{m+1} ,

et dans le second membre, la partie connue : les u_n^m , ainsi que les conditions aux limites $u_{N^-}^{m+1}$ et $u_{N^+}^{m+1}$.

La résolution du schéma à chaque pas de temps revient donc à calculer la solution d'un système linéaire de la forme

$$(31) \quad A\mathcal{U}^{m+1} = b^m,$$

où A est la matrice tridiagonale, \mathcal{U}^{m+1} contient les inconnues u_n^{m+1} , et b^m est le second membre, connu. On obtient alors la solution à l'instant $\tau + \delta\tau$ (les u_n^{m+1}) en fonction de la solution à l'instant τ (les u_n^m).

L'inconvénient de la méthode d'Euler implicite par rapport à la méthode explicite est l'apparente difficulté supplémentaire pour la résolution de ces systèmes linéaires afin de calculer la solution. Toutefois, un avantage certain de la méthode est qu'elle est intrinsèquement stable. En effet, quelle que soit la valeur du paramètre $\alpha > 0$, la norme de la matrice A^{-1} est inférieure à 1, assurant la stabilité du schéma.

Une manière a priori simple de résoudre les systèmes linéaires (31) consiste à inverser la matrice A , en remarquant qu'elle est constante au fil des pas de temps. Mais l'inverse d'une matrice tridiagonale est pleine, ce qui représente un coût de stockage important, au delà du coût de calcul de la matrice inverse. En temps normal, l'inverse d'une matrice de taille N nécessite $\mathcal{O}(N^4)$ opérations. Le stockage de l'inverse de la matrice représente N^2 éléments, à comparer avec seulement $3N$ éléments dans la matrice A .

La résolution d'un système linéaire peut se faire avec la traditionnelle méthode du pivot de Gauss, qui consiste à itérer les opérations sur les lignes ou colonnes de la matrice pour rendre le système triangulaire. La résolution d'un système linéaire triangulaire est alors très rapide.

La matrice étant ici tridiagonale, il est plus intéressant d'utiliser une décomposition LU.

2.3.2. Méthode LU pour la résolution du système linéaire. L'idée de la méthode LU consiste à décomposer la matrice A sous la forme d'un produit $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure (Lower), et U une matrice triangulaire supérieure (Upper). Cette décomposition n'existe que sous conditions de rang et de non nullité des mineurs principaux de la matrice. Dans le cas de la matrice A présente, cette décomposition existe, et les matrices L et U n'ont que deux diagonales non nulles :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & l_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_{N-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & -\alpha & & \vdots \\ \vdots & 0 & u_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_N \end{pmatrix},$$

où les coefficients se calculent par récurrence :

$$u_1 = (1 + 2\alpha), \quad u_n = (1 + 2\alpha) - \frac{\alpha^2}{u_{n-1}}, \quad l_n = \frac{-\alpha}{u_n}.$$

Il faut donc $\mathcal{O}(N)$ opérations pour "calculer" les matrices L et U . La résolution du système (31) se fait alors en deux étapes :

$$(32) \quad Lz = b^m, \quad UU^{m+1} = z.$$

Chacun de ces deux systèmes linéaires est triangulaire, avec seulement une sous- (ou sur-) diagonale non nulle. Le premier système se résout donc rapidement : la première ligne donne directement $z_1 = b_1^m$. Puis la deuxième ligne donne z_2 en fonction de z_1 et b_2 . Et ainsi de suite. De même, on peut résoudre le deuxième système linéaire, mais en partant de la dernière ligne, qui donne directement u_N^{m+1} en fonction de z_N .

Il faut donc $\mathcal{O}(N)$ opérations pour résoudre chacun de ces deux systèmes, et donc pour résoudre (31). C'est très clairement l'une des méthodes les plus efficaces pour résoudre un système linéaire tridiagonal, d'autant plus que la décomposition LU (ou le calcul des coefficients de ces matrices) est fait une fois pour toutes, la matrice étant indépendante du pas de temps considéré.

On voit donc qu'avec cette décomposition, le calcul de la solution à l'instant $(m+1)\delta\tau$ en fonction de la solution à l'instant $m\delta\tau$ n'est pas particulièrement plus "long" que dans le cas de la méthode d'Euler explicite, avec la garantie de la stabilité du schéma en plus.

Toutefois, la précision de la méthode est toujours en $\mathcal{O}(\delta\tau + \delta x^2)$, ce qui impose un pas de temps $\delta\tau$ très petit si on veut garantir une certaine précision à la solution calculée.

2.4. Schéma de Crank-Nicholson. Le schéma de Crank-Nicholson consiste à utiliser un schéma aux différences finies, "centré" en espace, afin d'accroître la précision. L'intérêt du schéma de Crank-Nicholson est qu'il permettra de réduire l'erreur sur la dérivée temporelle en $\mathcal{O}(\delta\tau^2)$, au lieu de $\mathcal{O}(\delta\tau)$.

En pratique, le schéma de Crank-Nicholson revient à faire la moyenne du schéma d'Euler explicite et du schéma d'Euler implicite :

$$(33) \quad \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta\tau} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{\delta x^2} + \frac{u_{n-1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}}{\delta x^2} \right).$$

On peut montrer que l'erreur de ce schéma est en $\mathcal{O}(\delta\tau^2 + \delta x^2)$, ce qui n'impose plus des pas de temps particulièrement petits pour garantir la précision.

On peut réécrire l'équation (33) sous la forme

$$(34) \quad u_n^{m+1} - \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1}) = u_n^m + \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m),$$

où α est toujours donné par (25). Le second membre est connu, et on obtient à nouveau une dépendance implicite des u_n^{m+1} en fonction des u_n^m .

Comme dans le cas du schéma d'Euler implicite, en rassemblant les équations (34) pour tous les n , on obtient un système linéaire

$$(35) \quad C\mathcal{U}^{m+1} = b^m,$$

où C est la matrice tri-diagonale suivante :

$$(36) \quad C = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & 1 + \alpha & -\frac{1}{2}\alpha & & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{2}\alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}.$$

Le second membre b^m est donné par

$$(37) \quad b^m = \begin{pmatrix} f_{N^--+1}^m \\ \vdots \\ f_0^m \\ \vdots \\ f_{N^+-1}^m \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} u_{N^--}^{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{N^+}^{m+1} \end{pmatrix},$$

avec $f_n^m = (1 - \alpha)u_n^m + \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^m + u_{n+1}^m)$. On retrouve une fois encore la partie provenant du second membre qui est connu (solution à l'instant $m\delta\tau$) et la partie provenant des conditions aux limites (également connues) à l'instant $(m+1)\delta\tau$.

On remarque que $C(\alpha) = A(\frac{\alpha}{2})$. Autrement dit, en considérant $\frac{\alpha}{2}$ au lieu de α dans le schéma d'Euler implicite, on obtient la même matrice qu'ici. On peut donc utiliser la méthode LU précédemment détaillée, en divisant α par 2, pour résoudre les systèmes linéaires (35).

3. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE BLACK-SCHOLES

Il est également possible de résoudre directement l'équation de Black-Scholes (1) sans passer par les précédentes transformations et l'équation de la chaleur. Parmi les schémas présentés, la façon la plus précise et efficace consiste à utiliser une méthode de Crank-Nicholson en temps, et des schémas aux différences finies centrées en espace. Une difficulté supplémentaire apparaît toutefois dans le fait que les coefficients des dérivées partielles spatiales ne sont pas constants (ils dépendent de S), ce qui complique la résolution des systèmes linéaires (qui restent malgré tout tri-diagonaux).