1. Problèmes inverses, problèmes mal posés

1.1. **Introduction aux problèmes inverses.** Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. C'est également en quelques sortes le contraire d'un problème direct : supposons que l'on dispose d'un modèle. Si on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, en déduire une trajectoire, et l'observer. Il s'agit du problème direct. Le problème inverse consiste à remonter le schéma : connaissant les observations, le but est de retrouver les valeurs des paramètres.

La résolution du problème inverse passe donc en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

On retrouve des problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques, en particulier dans l'étude de systèmes complexes pour lesquels on a accès qu'à un petit nombre de mesures, par exemple : la Terre en géophysique, les tissus organiques en imagerie médicale, l'Univers en cosmologie, une salle de concert en acoustique architecturale ...

Exemples : résolution d'un système linéaire, ingénierie pétrolière, tomographie en médecine, déconvolution (en imagerie notamment), détermination des constantes d'une réaction chimique, détermination de la forme d'un obstacle par radar, acoustique sous-marine, ...

1.2. **Exemple de problème inverse.** On s'intéresse à l'estimation de paramètres dans une équation aux dérivées partielles :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a \frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{dans } \Omega\times]0;T[, \\ y(x,0) = y_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = g \quad \text{sur } \Gamma\times]0;T[. \end{array}\right. \tag{1}$$

C'est l'équation de la chaleur, y est la température, f est un terme source, a est la conductivité thermique, et g est le flux de chaleur (entrant ou sortant). On peut utiliser la même équation pour modéliser un écoulement monophasique (comme du pétrole) : y est la pression, f représente les puits de pompage, a est la perméabilité du milieu, et $g = 0$ pour un milieu fermé.

Le problème est le suivant : à partir de mesures de y en certains points et à certains instants, il faut identifier a. Le problème direct est évidemment trivial, mais le problème inverse peut être des plus compliqués.

1.3. **Problème bien posé - mal posé.** Un problème bien posé, au sens de Hadamard, a les propriéés suivantes : une solution existe, la solution est unique, et elle dépend de façon continue des données.

Le problème est mal posé si l'une de ces propriétés n'est pas satisfaite. En pratique, les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions.

Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.

Si une solution existe, il est parfaitement concevable (et nous le verrons sur des exemples) que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématique).

La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori).

Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données réelles.

Exemple : système linéaire mal posé, problème de Cauchy pour une équation elliptique, déconvolution.

1.4. **Exemple de problème inverse mal posé.** La différentiation est l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à le considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le prototype du problème mal posé, comme nous allons le voir.

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, et l'opérateur intégral A défini par

$$Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt. \tag{2}$$

Il est facile de voir directement que A est un opérateur linéaire de $L^2(0;1)$. Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel

$$Im(A) = \{f \in H^1(0;1), u(0) = 0\},$$

où $H^1(0;1)$ est l'espace de Sobolev. En effet, l'équation $Af = g$ est équivalente à $f(x) = g'(x)$ et $g(0) = 0$. L'image de A n'est pas fermée dans $L^2(0;1)$ (bien entendu, elle l'est dans $H^1(0;1)$). En conséquence, l'inverse de A n'est pas continu sur $L^2(0;1)$, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons une fonction $g \in C^1([0;1])$, et $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$g_n(x) = g(x) + \frac{1}{n}\sin(n^2 x).$$

Alors

$$f_n(x) = g_n'(x) = g'(x) + n\cos(n^2 x) = f'(x) + n\cos(n^2 x).$$

De simples calculs montrent que $\|g - g_n\|_2 = \mathcal{O}(1/n)$ alors que $\|f - f_n\|_2 = \mathcal{O}(n)$.

Ainsi, la différence entre f et f_n peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre g et g_n est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu, au moins avec ce choix des normes.

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes mal posés. Une petite perturbation sur les données (ici g) peut avoir une influence arbitrairement grande sur le résultat (ici f). Une seconde classe de problèmes inverses est l'estimation de paramètres dans les équations différentielles. Nous allons en voir un exemple très simple.

1.5. **Exemple de problème inverse mal posé - 2.** On considère le problème elliptique en dimension 1 :

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & \text{pour } x \in]-1;1[, \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Dans cet exemple, nous prendrons $a(x) = x^2 + 1$, et la solution $u(x) = (1 - x^2)/2$, ce qui donne $f(x) = 3x^2 + 1$.

Le problème direct consiste à calculer u, étant donnés a et f. Pour le problème inverse, nous considérerons que f est connue, et nous chercherons à retrouver le cœfficient a à partir d'une mesure de u. Pour cet exemple, volontairement simplifié, nous supposerons que l'on mesure u en tout point de l'intervalle $]-1;1[$, ce qui est bien évidemment irréaliste. Nous allons voir que même dans cette situation optimiste, nous sommes susceptibles de rencontrer des difficultés.

En intégrant l'équation du problème, et en divisant par u', nous obtenons l'expression suivante pour a (en supposant que u' ne s'annule pas, ce qui est faux sur notre exemple) :

$$a(x) = \frac{C}{u'(x)} + \frac{1}{u'(x)} \int_0^x f(\xi)\, d\xi = \frac{C}{x} + x^2 + 1, \tag{4}$$

pour $x \neq 0$, et où C est une constante d'intégration.

Nous voyons que, même dans ce cas particulier, a n'est pas déterminé par les données, c'est-à-dire u. Bien entendu dans ce cas, il est clair que la bonne solution correspond à $C = 0$, puisque c'est la seule valeur pour laquelle a est borné. Pour pouvoir discriminer parmi les différentes solutions possibles, nous avons du faire appel à une information supplémentaire (on parle généralement d'information a priori).

Il y a dans ce problème deux sources d'instabilité : tout d'abord l'équation fait intervenir u', et nous venons de voir que le passage de u à u' est source d'instabilité. Il s'agit là d'un phénomène commun aux problèmes linéaires et non-linéaires. Par contre, la division par u' montre une instabilité spécifique des problèmes non-linéaires. Si u' s'annule, la division est impossible. Si u' est simplement petit, la division sera cause d'instabilité.