8. Application à un système météo/océano simple

8.1. Équation de Burgers. Nous prenons tout d'abord l'exemple des équations de Burgers, qui peuvent être vues comme le résultat d'une intégration verticale des équations de la dynamique des fluides, puis d'une moyenne (ou intégration) horizontale le long des méridiens de la Terre, pour se ramener à une équation 1D, qui modélise (de façon très simpliste) un écoulement le long d'un parallèle de la Terre (typiquement le parallèle 45° Nord).

L'équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

où u est la fonction de courant, et ν est la diffusion.

On suppose que u est observé partout et tout le temps, pour simplifier les calculs. Et on a donc accès à une fonction u_{obs}. La fonction coût est la suivante :

$$J(u_0) = \frac{1}{2}\int_0^T (u - u_{obs})^2\, dt,$$

et on souhaite la minimiser pour identifier la meilleure condition initiale possible. On ne tient pas compte ici du terme de rappel à l'ébauche (qui permet notamment de régulariser le problème d'optimisation), son gradient ne posant aucune difficulté.

Si on perturbe la trajectoire u dans la direction $\bar{u}$, on obtient l'équation linéaire tangente suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = A\bar{u},$$

où A représente l'opérateur linéaire suivant :

$$A = -\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Le modèle adjoint est alors obtenu en transposant cet opérateur :

$$A^T = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(u.)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

En effet, si on applique le premier terme de l'opérateur A à une fonction test f, et qu'on en prend le produit scalaire avec une fonction g, on trouve

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial u}{\partial x} f\right) g = \int_\Omega \left(-\frac{\partial u}{\partial x} g\right) f$$

et donc l'opérateur est auto-adjoint. Si on fait de même avec le second terme de A, on a, en faisant une intégration par parties (et en négligeant les termes de bord, absents sur un domaine périodique) :

$$\int_\Omega \left(-u\frac{\partial f}{\partial x}\right) g = \int_\Omega \left(\frac{\partial(ug)}{\partial x}\right) f,$$

et l'opérateur adjoint est donc $\dfrac{\partial(u.)}{\partial x}$. Et le dernier terme est auto-adjoint, avec deux intégrations par parties (qui ne changent donc pas le signe).

Donc en appliquant cet opérateur à la variable adjointe p, on obtient :

$$A^T p = -p\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (up)}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = u\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

et on en déduit le modèle adjoint :

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = u\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - (u - u_{obs}),$$

avec une condition finale $p(T) = 0$ (attention, ne pas oublier dans le second membre le terme de forçage par la dérivée de la fonction coût par rapport à la trajectoire u).

Le gradient de la fonction coût est alors

$$\nabla J(u_0) = -p(0).$$

8.2. **Équations de Saint-Venant.** Nous prenons maintenant l'exemple du modèle shallow water, ou équations de Saint-Venant. Ces équations sont utilisées pour décrire l'évolution d'un fluide incompressible, pour lequel la hauteur caractéristique de l'eau est petite par rapport aux dimensions horizontales. Les équations générales de la dynamique des fluides géophysiques sont intégrées verticalement, sous l'hypothèse hydrostatique (équilibre du gradient vertical de pression avec la gravité), négligeant ainsi l'accélération verticale. Les équations de Saint-Venant sont :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u\phi}{\partial x} + \frac{\partial v\phi}{\partial y} = 0,
\end{aligned}$$

où u et v sont les composantes horizontales de la vitesse, et ϕ est le géopotentiel (proportionnel à la hauteur de la surface libre). Les paramètres se réduisent ici à f, la force de Coriolis.

On suppose (pour simplifier les écritures) que u, v et ϕ sont observés à chaque instant et partout, et on dispose donc des données u_{obs}, v_{obs} et ϕ_{obs}. Le but est de retrouver la condition initiale $X_0 = (u_0, v_0, \phi_0)$ du système grâce aux observations. On ne tient pas compte ici du terme de rappel à l'ébauche, et on considère la fonction coût suivante :

$$J(X_0) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[(u - u_{obs})^2 + (v - v_{obs})^2 + \alpha(\phi - \phi_{obs})^2\right] dt,$$

où α est un cœfficient de pondération entre les écarts quadratiques sur la vitesse et sur le géopotentiel.

Si on linéarise le modèle autour de la trajectoire de référence (u, v, ϕ), le modèle linéaire tangent (dont les variables sont notées $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})$) est (aux erreurs de calcul près) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial u}{\partial y} - f\bar{v} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial v}{\partial y} + f\bar{u} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\phi}{\partial x} + \frac{\partial u\bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\phi}{\partial y} + \frac{\partial v\bar{\phi}}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

On peut alors écrire ce système sous forme matricielle :

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial t} = A\bar{X},$$

où $\bar{X} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})$ est la variable d'état du modèle linéaire tangent, est A est la matrice suivante :

$$F = \begin{pmatrix}
-u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y} + f & -\frac{\partial}{\partial x}\\
-\frac{\partial v}{\partial x} - f & -u\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial y}\\
-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \phi\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial y}
\end{pmatrix}.$$

Le modèle adjoint est obtenu par transposition de cette matrice :

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = A^T P - \frac{\partial J}{\partial X},$$

ce qui donne (aux erreurs de calcul près), après transposition de la matrice F (donc échange des lignes et colonnes) **ET** des opérateurs de dérivation (voir le 1er paragraphe pour un détail du calcul de l'adjoint de chaque terme) :

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - u\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\partial (v\tilde{u})}{\partial y} + \tilde{v}\frac{\partial v}{\partial x} + f\tilde{v} - \phi\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = -(u - u_{obs})\\
&-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial (u\tilde{v})}{\partial x} - v\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - f\tilde{u} - \phi\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = -(v - v_{obs})\\
&-\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - u\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} - v\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = -\gamma(\phi - \phi_{obs}).
\end{aligned}$$

Le système adjoint est résolu de façon rétrograde en temps, avec la condition finale $\tilde{u}(T) = 0$, $\tilde{v}(T) = 0$ et $\tilde{\phi}(T) = 0$. Et alors le gradient de la fonction coût est donné par :

$$\nabla J(U_0) = -P\,(0) = -\begin{pmatrix} \tilde{u}\,(0)\\ \tilde{v}\,(0)\\ \tilde{\phi}\,(0) \end{pmatrix}.$$