$\boxed{\text{Assimilation de données}}$

Mini-projet "Assimilation - interpolation optimale et 3D-VAR"

On souhaite comparer dans un cas simple les méthodes de l'interpolation optimale et du 3D-VAR. On se place donc à un instant fixé, et on cherche le meilleur compromis entre des observations et une ébauche.

On se place en dimension 3 d'espace, on note

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le vecteur d'état du système. On dispose d'une ébauche de l'état du système :

$$X_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur d'observation comprend deux observations

$$X_{obs} = \begin{pmatrix} x_{obs1} \\ x_{obs2} \end{pmatrix}$$

où la première observation porte sur la quantité physique $x + y$, et la deuxième observation mesure la quantité physique z.

1. Donner la matrice 2×3 (2 lignes et 3 colonnes) H, correspondant à l'opérateur d'observation, de sorte que HX représente les mêmes quantités physiques que X_{obs}.

On donne $x_{obs1} = 2$ et $x_{obs2} = -1$. Les matrices de covariance d'erreur sur l'ébauche et sur les observations sont :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Enfin, on considère la fonction coût du 3D-VAR :

$$J(X) = \frac{1}{2}(X - X_b)^T B^{-1}(X - X_b) + \frac{1}{2}(HX - X_{obs})^T R^{-1}(HX - X_{obs}).$$

2. Remplacer X_b, B, R (et leurs inverses), H et X_{obs} par leur valeur, et en déduire une expression de $J(X)$ en fonction de x, y et z uniquement.

3. Calculer les dérivées partielles de J par rapport à x, y et z respectivement, et en déduire un système de 3 équations à 3 inconnues caractérisant le minimum de J.

4. Résoudre ce système, et en déduire les valeurs "optimales" de x, y et z.

5. Vérifier (par le calcul) qu'on obtient le même résultat qu'avec l'expression théorique du minimum de la fonction coût :

$$X = [B^{-1} + H^T R^{-1} H]^{-1}(B^{-1} X_b + H^T R^{-1} X_{obs})$$

6. Calculer la solution fournie par l'interpolation optimale :

$$X = X_b + BH^T(HBH^T + R)^{-1}(X_{obs} - HX_b)$$

et conclure.

7. Quelles matrices de covariance B et R faudrait-il considérer pour donner un poids équivalent aux observations et à l'ébauche ? Reprendre les calculs dans ce cas-là.