

On souhaite comparer dans un cas relativement simple l'analyse fournie par le filtre de Kalman complet et celle fournie par le filtre SEEK. On se place donc à un instant fixé, et on cherche le meilleur compromis entre des observations et une ébauche.

On réalisera un programme (en Matlab, ou dans un autre logiciel de votre préférence) qui effectue les calculs. Les questions pourront être résolues à l'aide d'un calcul sur ordinateur.

On se place en dimension 5 d'espace, on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$$

le vecteur d'état du système. On dispose d'une ébauche de l'état du système :

$$X_b = (1; -2; 3; 5; -4)^T$$

Le vecteur d'observation comprend 4 observations

$$X_{obs} = \begin{pmatrix} x_{obs1} \\ \vdots \\ x_{obs4} \end{pmatrix}$$

où la première observation porte sur la quantité physique $x_1 - x_2$, la deuxième observation mesure la quantité physique $2x_2 + x_3$, la troisième mesure $x_5 - x_4$, et la quatrième observation mesure la quantité physique $x_5 + x_2 + x_1$.

1. Donner la matrice 4×5 (4 lignes et 5 colonnes) H , correspondant à l'opérateur d'observation, de sorte que HX représente les mêmes quantités physiques que X_{obs} . Définir cette matrice dans le programme.

On donne les valeurs des observations mesurées :

$$X_{obs} = (2; -1; 5; 7)^T$$

Les matrices de covariance d'erreur sur l'ébauche et sur les observations sont :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Étant donné l'ébauche X_b (ou prévision X^f), sa matrice de covariance d'erreur B (ou P^f), les observations X_{obs} , leur matrice de covariance d'erreur R , et l'opérateur d'observation H , calculer la matrice de gain K et réaliser une étape d'analyse du filtre de Kalman.

3. Calculer la matrice de covariance d'erreur P^a sur l'état analysé à l'aide de la formule du filtre de Kalman. La variance de l'erreur est la trace de cette matrice (somme des éléments

diagonaux). De combien a varié (diminué ou augmenté) la variance de l'erreur entre l'ébauche (ou prévision) et l'analyse? Commenter.

4. On définit la matrice S suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut approcher la matrice de covariance B par le produit SS^T . Appliquer l'analyse définie par le filtre SEEK, trouver l'état analysé et calculer la matrice de covariance d'erreur d'analyse.

5. Comparer l'efficacité des deux filtres : décroissance de la variance totale de l'erreur d'analyse, rapidité, ...

6. Quelle est la quantité d'information de B contenue dans SS^T ? (calculer les valeurs propres, et calculer le rapport des sommes des valeurs propres de B et de SS^T)