

**TD n°2 : Convexité - Gâteaux-différentiabilité**

---

**Exercice 1 : Convexité**

Les fonctions suivantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  sont-elles convexes ? strictement convexes ?  $\alpha$ -convexes ?

1.1.  $x \rightarrow x^+ = \max(x, 0)$ .

1.2.  $x \rightarrow |x|$ .

1.3.  $x \rightarrow x^2$ .

1.4.  $x \rightarrow x^3$ .

**Exercice 2 : Convexité**

La fonction  $f(x) = \|x\|^2$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  est-elle convexe ? est-elle strictement convexe ? est-elle  $\alpha$ -convexe ?

**Exercice 3 : Calcul des Gâteaux-dérivées et convexité**

On considère  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) = \|Ax - b\|^2$ , avec  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ .

3.1. Calculer la Gâteaux-dérivée de  $f$  et en déduire le gradient  $\nabla f(x)$ .

3.2. Calculer la Gâteaux-dérivée au second ordre de  $f$  et en déduire la hessienne  $\nabla^2 f(x)$ .

3.3. Pour quel type de matrices  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ , la fonction  $f$  est-elle convexe ? strictement convexe ?  $\alpha$ -convexe ?

**Exercice 4 : Caractérisations de la stricte-convexité**

4.1. Montrer que si  $f$  est Gâteaux-différentiable sur  $U$ ,  $f$  est strictement convexe sur  $U$  ssi pour tout  $u, v \in U$ ,  $u \neq v$ ,  $f(v) > f(u) + (f'(u), v - u)$ .

4.2. Montrer que si  $f$  est Gâteaux-différentiable sur  $U$ ,  $f$  est strictement convexe sur  $U$  ssi pour tout  $u, v \in U$ ,  $u \neq v$ ,  $(f'(v) - f'(u), v - u) > 0$ .

4.3. Montrer que si  $f$  est deux fois Gâteaux-différentiable sur  $U$  et si pour tout  $u, w \in U$ ,  $w \neq 0$ ,  $(f''(u); w, w) > 0$ , alors  $f$  est strictement convexe sur  $U$ .